بسم الله الرحمن الرحیم

مراجع ؛

- 1-) ارتعاشات مکانیکی William Thomson ....ترجمه : اردشیرکرمی
- 2-) ارتعاشات مکانیکی Rao .... ترجمه : بهرام پوستی
- 3-) ارتعاشات Hinkle

سرفصل ها ؛

- 1-)ارتعاشات سیستم های 1 درجه آزادی
  - a-) معادله حرکت به روش انرژی و فرکانس طبیعی
  - b-) معادله حرکت به روش نیوتن
  - c-) پاسخ ها
    - 1) کند میرا
    - 2) تند میرا
    - 3) نوسانی
    - 4) بحرانی
  - d-)ارتعاشات تحت تحریک اجباری
    - 1) بالانسی
    - 2) تحریک پایه
  - e-) ارتعاشات گذرا
- 2-)ارتعاشات سیستم های 2 درجه آزادی
  - a-) معادلات حرکت
  - b-) فرکانس طبیعی
  - c-) تحریک اجباری

- دینامیک : تحلیل رفتار سیستم تحت یک بار دینامیکی(متغیر با زمان) است.
-
- ارتعاشات : بررسی پاسخ یک سیستم به یک ورودی دینامیکی(متغیر با زمان) می باشد.
- **تقسیم بندی سیستم های ارتعاشی ازلحاظ نوع ؛**

1-) سیستم گسسته (جرم وفنر)-lump mass

2-) سیستم پیوسته

*تذکر: در سیستم پیوسته بی نهایت درجه آزادی داریم.

تقسیم بندی سیستم های ارتعاشی از لحاظ نوع ورودی؛

1-) ارتعاشات آزاد :ورودی نداریم ولی سیستم را از حالت تعادل آن خارج می کنیم ، فرکانس یا پریود نوسانات فقط به خود سیستم وابسته است.

2-) ارتعاشات هارمونیک :ورودی سینوسی یا کسینوسی .

3-) ارتعاشات گذرا :ورودی در زمان محدود اعمال می شود و برداشته می شود ولی تابع این نیرو مشخص است.

4-) ارتعاشات راندم : ورودی کاملا ناشناخته است وفقط به لحاظ آماری قابل بررسی است.

- ارتعاشات از لحاظ فرمول بندی وساده سازی :

- 1-) خطی
- 2-) غیر خطی

فرمول اپراتور خطی:

$$L(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)=\alpha_1 L(x_1)+\alpha_2 L(x_2)$$

مثال خطی:

$L=4x \longrightarrow L(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)=4(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)=\alpha_1(4x_1)+\alpha_2(4x_2)$

$=\alpha_1 L(x_1)+\alpha_2 L(x_2)$ (اپراتور خطی ؛ $4x$)

مثال غیر خطی :

$L=x^2 \longrightarrow L(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)=(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)^2=\alpha_1^2 x_1^2+\alpha_2^2 x_2^2+2\alpha_1\alpha_2 x_1 x_2$

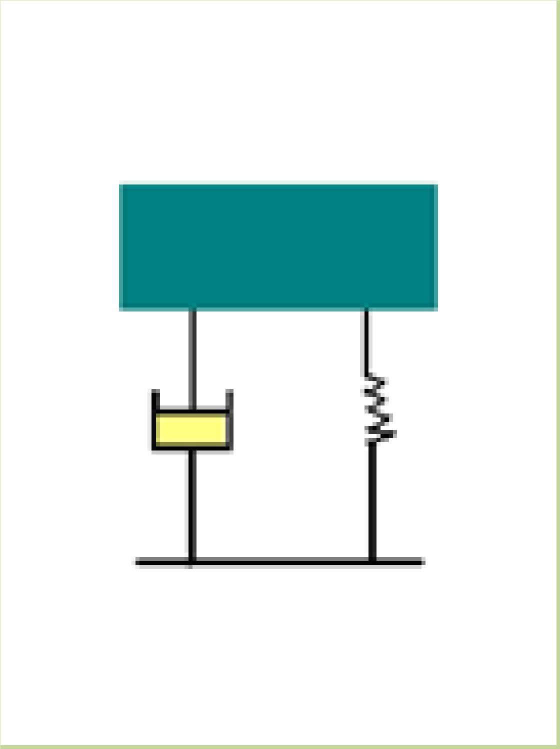
$\neq L(\alpha_1 x_1)+L(\alpha_2 x_2)$ (اپراتور غیر خطی ؛ x^2)

- **درجه آزادی :** تعداد حرکت مستقلی است که باید برای سیستم بیان کرد تا کل سیستم شناسایی شود.

- **سیستم های ارتعاشی با یک درجه آزادی :**

اجزای آن جرم ,فنر ودمپر است. فنر در حقیقت نماد ذخیره کننده انرژی است میتواند معادل از

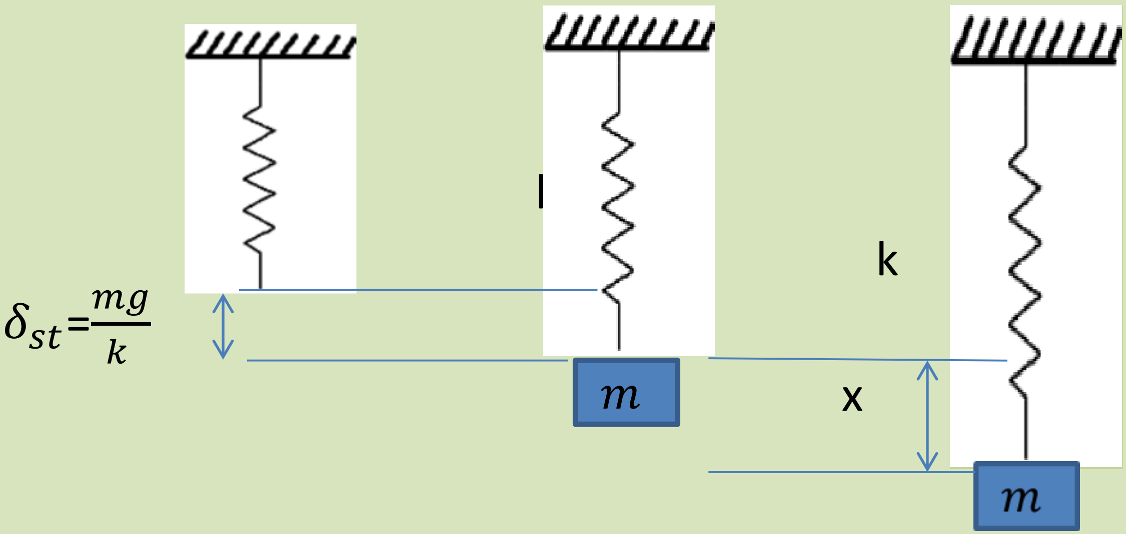
خودفنرها الاستیسیته جسم و.... باشد. دمپر نمادی از اتلاف انرژی است.



استخراج معادلات به روش انرژی:

ابتدا جرم را آویخته وآرام رها می کنیم

تا به وضعیت تعادل استاتیکی برسد.



در این حالت مجموع انرژی سیستم مقداری ثابت بوده و انرژی با گذشت زمان تغییر نمیکند.

$$T + U = \text{cte} \Longrightarrow \frac{d}{dt}(T+U) = 0$$

جنبشی   پتانسیل

*تذکر : 1-) روش انرژی در صورت وجود دمپر قابل کاربرد نیست.

2-) تغییرات نسبت به موقعیت تعادل استاتیکی سنجیده می شود.

$\Delta U = U_k + U_{mg}$

$\Delta U_k = \frac{1}{2} K (x)^2$

$\Delta U_{mg} = \pm mg(\Delta x)$

- تغییرات انرژی پتانسیل فنری نسبت به موقعیت تعادل استاتیکی;
- $\Delta U_k = \frac{1}{2} K(x + \delta_{st})^2 - \frac{1}{2} K (\delta_{st})^2$
- تغییرات انرژی پتانسیل نسبت به موقعیت تعادل استاتیکی ;
-
- $\Delta U_{mg} = -mg(x + \delta_{st}) - mg\delta_{st} = -mgx$
- و برای انرژی جنبشی ;
- $\Delta T = \frac{1}{2} m \left[(\dot{x} + \cancel{\dot{\delta}_{st}})^2 - 0\right] = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$
- سرعت در   انرژی جنبشی
- هنگام ارتعاش   در تعادل استاتیکی

داریم:

$$\frac{d}{dt}\left(T + U_{mg} + U_k\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgx + \frac{1}{2}K(x+\delta_{st})^2 - \frac{1}{2}K{\delta_{st}}^2\right]=0$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgx + \frac{1}{2}Kx^2 + \cancel{\frac{1}{2}K{\delta_{st}}^2} + Kx\delta_{st} - \cancel{\frac{1}{2}K{\delta_{st}}^2}\right]=0 \qquad \left(\delta_{st} = \frac{mg}{k}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \cancel{mgx} + \frac{1}{2}Kx^2 + \cancel{Kx\left(\frac{mg}{k}\right)}\right]=0$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Kx^2\right] = 0$$

$$\Longrightarrow \qquad m\ddot{x}\dot{x} + K\dot{x}x = 0$$

$\ddot{x} + \left(\frac{k}{m}\right)x = 0$ معادله حرکت

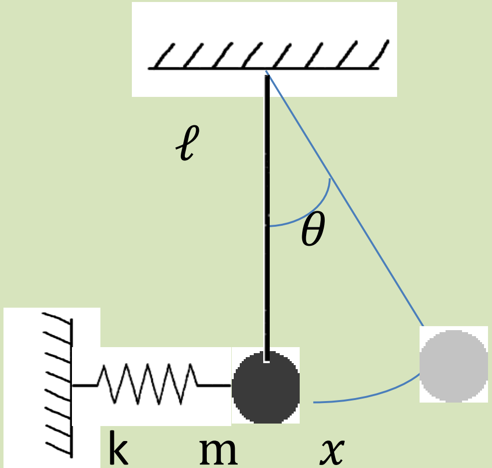
فرکانس زاویه ای : $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$

فرکانس طبیعی $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$

نکته :همان طور که این مسئله نشان می دهد، اگر جسمی به تعادل استاتیکی رسیده باشد وسپس دچارارتعاش شود، چنان چه اثر وزن به صورت تغییر شکل در فنرها ظاهر شده باشد ،آن گاه می توان تغییرات انرژی پتانسیل فنری را به صورت $\frac{1}{2}kx^2$ نوشت که x فاصله سیستم از موقعیت استاتیکی می باشد .

همچنین در این شرایط از انرژی پتانسیل وزنی صرف نظر می کنیم (تاثیر ندارد)

بررسی حرکت نوسانی آونگ ;(فنر ومیله بدون جرم)



داریم: $\theta = \frac{x}{l} \quad , \quad x = l\theta \longrightarrow \dot{x} = l\dot{\theta}$

$$\begin{cases} T=\frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 \\ U_k = \frac{1}{2}K(l\theta)^2 \\ U_{mg} = -\mathrm{mgl}\cos\theta - (-mgl) = \mathrm{mg}\ell(1-\cos\theta) \end{cases}$$

ازپایستگی انرژی داریم :

- $\frac{d}{dt}\left(T+U_k+U_{mg}\right)=0$

- $\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2+\frac{1}{2}k(l\theta)^2+mgl(1-\cos\theta)\right]=0$

- $m\,l^2\ddot{\theta}\,\dot{\theta}+\mathrm{k}l^2\dot{\theta}\theta+mgl\dot{\theta}\sin\theta=0 \qquad \sin\theta\approx\ \theta$

- $m\,l^2\ddot{\theta}\,\cancel{\dot{\theta}}+\mathrm{k}l^2\cancel{\dot{\theta}}\theta+mgl\ \theta\cancel{\dot{\theta}}=0$

- $\ddot{\theta}+\left(\frac{k\,l^2}{m\,l^2}+\frac{mgl}{ml^2}\right)\theta=0$

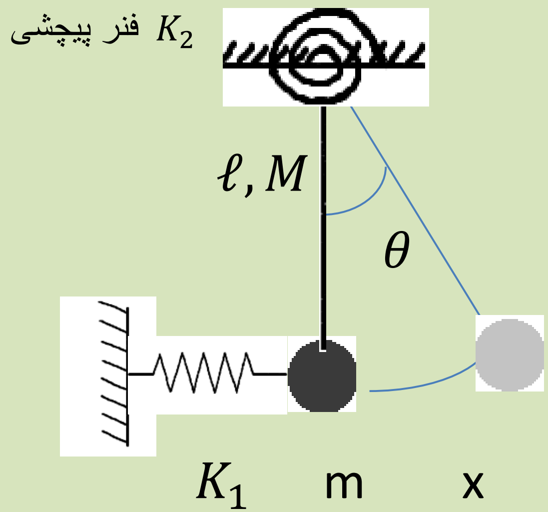
معادله حرکت : $\ddot{\theta}+\left(\frac{k}{m}+\frac{g}{l}\right)\theta=0$

فرکانس زاویه ای : $\omega_n=\sqrt{(\frac{k}{m}+\frac{g}{l})}$

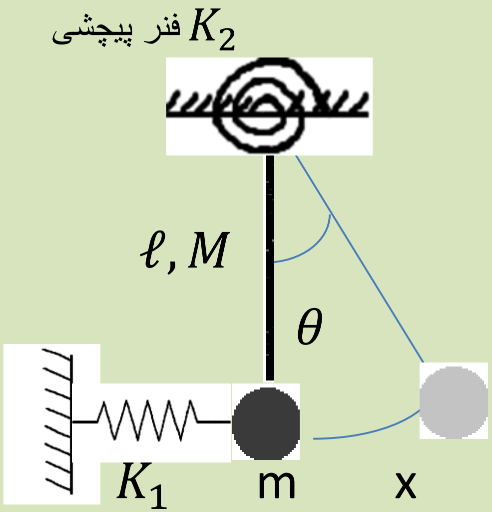
فرکانس طبیعی : $f_n=\frac{\omega_n}{2\pi}$

- مثال : بررسی معادلات حرکت ؟

(میله ها دارای جرم اند)



(اتصال جوش)



(اتصال پین)

- یادآوری : از دینامیک به یاد داریم انرژی جنبشی جسم صلبی که هم دارای حرکت انتقالی است و هم
- دارای حرکت دورانی، از رابطه زیر بدست می آید؛

$$\& \begin{cases} T_G = \frac{1}{2} m{V_G}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2 \\ \\ T_o = \frac{1}{2} I_o \omega^2 \end{cases}$$

وهمچنین ; $I_o = \bar{I} + md^2$

- نکته : وقتی یک دیسک را به وسیله پین به میله متصل می کنیم،در حرکت دورانی دیسک دوران
- نمیکند.ولی اگر دیسک را با جوش به میله متصل کنیم، آنگاه حرکت دورانی نیز خواهد داشت.

نکته : انرژی پتانسیل فنر پیچشی از رابطه زیر بدست می آید؛

$$\text{فنر پیچشی} \; ; \; U_k = \frac{1}{2} k\theta^2$$

بنابر این داریم ؛

$$\begin{cases} T_{(\text{پین})} = \frac{1}{2} M(\frac{l}{2}\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{12}Ml^2)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 + \cancel{\frac{1}{2}I\omega^2} \\ T_{(\text{جوش})} = \quad '' \quad + \quad '' \quad + \quad '' \quad + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}mr^2)\dot{\theta}^2 \end{cases}$$

$$U_k = \frac{1}{2}k_1(l\theta)^2 + \frac{1}{2}k_2\theta^2$$

$$U_{mg} = Mg\frac{l}{2}(1-\cos\theta) + mgl(1-\cos\theta) \longrightarrow \frac{d}{dt}\left(T + U_k + U_{mg}\right) = 0 \; ....$$

نکته: 1-) لختی دورانی میله همگن حول مرکز جرم

$$I_G = \frac{1}{12}Ml^2$$

2-) 〃 〃 〃 〃 〃 یک لبه

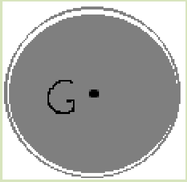
$$I_o = \frac{1}{3}Ml^2$$

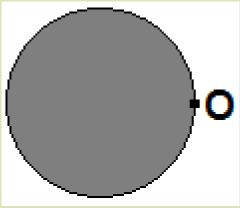
3-) 〃 〃 دیسک همگن حول محور دیسک(مرکز جرم)

$$I_G = \frac{1}{2}mr^2$$

4-) 〃 〃 دیسک همگن حول لبه دیسک

$$I_o = \frac{3}{2}mr^2$$





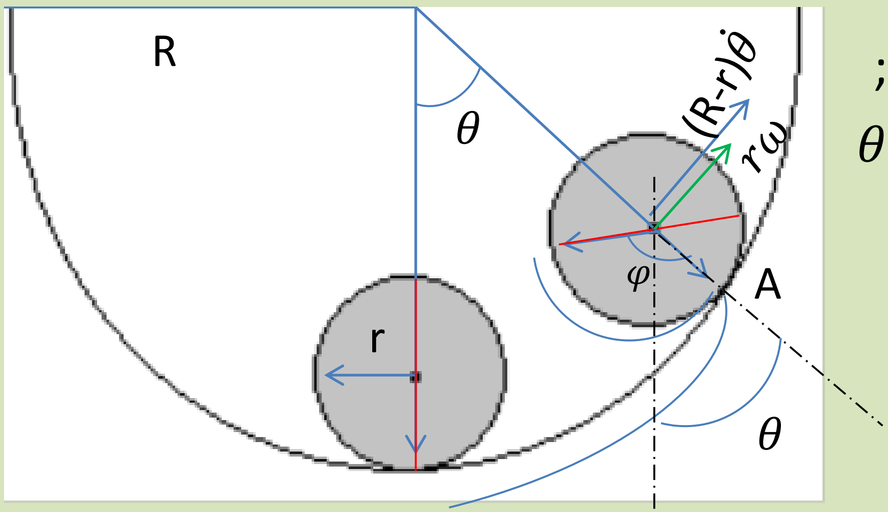
- مثال : دیسکی به شعاع r برروی یک سطح نیم دایره به شعاع R میغلتد.(غلتش بدون لغزش)فرکانس
- طبیعی نوسانات دیسک را بدست آورید.

- در این حالت برای تعیین ω از تغییرات
وضعیت یک خط فرضی روی دیسک کمک می گیریم ;
- چون دوران دیسک حول خودش (φ) خلاف جهت θ
- است،سرعت دورانی دیسک کم می شود. یعنی

$$\omega = \dot{\varphi} - \dot{\theta}$$

چون غلتش بدون لغزش است؛

$$\mathrm{r}\varphi = R\theta$$

- 

$$\varphi = \frac{R}{r}\theta \qquad \dot{\varphi} = \frac{R}{r}\dot{\theta} \qquad \omega = \frac{R}{r}\dot{\theta} - \dot{\theta} \longrightarrow \omega = (\frac{R}{r} - 1)\dot{\theta}$$

روش دیگر برا ی تشخیص ω:

θ براساس ; $V_{G\,\text{دیسک}} = (R - r)\dot{\theta}$ همچنین براساس دوران مطلق; $V_{G\,\text{دیسک}} = r\omega \longrightarrow \omega = (\frac{R}{r} - 1)\dot{\theta}$

برای U صرفاً داریم :

$$U = U_{mg}$$

$$U = mg[(R-r) - (R-r)\cos\theta] \longrightarrow U = mg(\mathrm{R}-\mathrm{r})(1-\cos\theta)$$

و برای انرژی جنبشی ، دیسک هم حرکت انتقالی دارد وهم دورانی.ویا حول نقطه تماس با سطح صرفاً دوران مطلق دارد.

$$T = \frac{1}{2}mV_G{}^2 + \frac{1}{2}\bar{J}\omega^2$$ یا $$T = \frac{1}{2}J_A\omega^2$$

-
- $$T = \frac{1}{2}J_A\omega^2 \longrightarrow T = \frac{1}{2}J_A(\frac{R}{r}-1)^2\dot{\theta}^2$$
- داریم $$\frac{d}{dt}(T+U) = 0$$
- $$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}J_A(\frac{R}{r}-1)^2\dot{\theta}^2 + mg(R-r)(1-\cos\theta)\right] = 0$$
- $$J_A(\frac{R}{r}-1)^2\,\ddot{\theta}\,\dot{\theta} + mg(R-r)(\sin\theta)\dot{\theta} = 0 \qquad \sin\theta \approx \theta$$

- $J_A(\frac{R}{r}-1)^2\,\ddot{\theta}\,\cancel{\dot{\theta}}+mg(R-r)\theta\cancel{\dot{\theta}}=0$

- $J_A(\frac{R}{r}-1)^2\,\ddot{\theta}+mg(R-r)\theta=0$

- $\ddot{\theta}+\frac{mg(R-r)}{J_A(\frac{R}{r}-1)^2}\,\theta=0$ معادله حرکت سیستم:

- $\frac{mg(R-r)}{J_A(\frac{R}{r}-1)^2}={\omega_n}^2$ و $(J_A=\frac{3}{2}\,mr^2)$

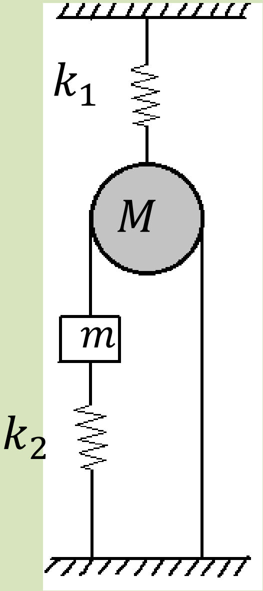
- ${\omega_n}^2=\frac{mg(R-r)}{\frac{3}{2}\,m\,r^2(\frac{R}{r}-1)^2}=\frac{\cancel{m}g\cancel{(R-r)}}{\frac{3}{2}\cancel{m}\,\cancel{r^2}\,\frac{(R-r)^{\cancel{2}}}{\cancel{r^2}}}=\frac{2g}{3\,(R-r)}$

- $\omega_n=\sqrt{\frac{2g}{3\,(R-r)}}$ (فرکانس زاویه ای)

- $f_n=\frac{\omega_n}{2\pi}=\cdots$ (فرکانس طبیعی)

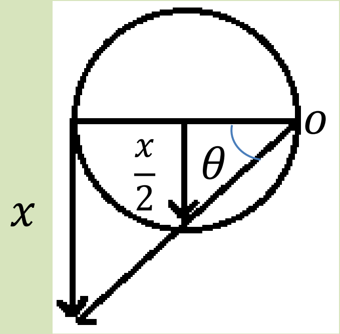
• مثال: معادله حرکت و فرکانس طبیعی را در سیستم زیر بدست آورید.

حل:)



* از ظاهر مسئله درمیابیم سیستم از نوع 1 درجه آزادی است.(چنانچه هریک از دو فنر را نگه داریم، سیستم هیچ گونه حرکتی نخواهد داشت.)

از دینامیک و به کمک شکل مقابل داریم:



$$x = 2r\theta \qquad x_G = r\theta \qquad \theta = \frac{x}{2r}$$

$$T_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$T_{disc} = \frac{1}{2}J_o\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}Mr^2\right)\left(\frac{\dot{x}}{2r}\right)^2 \qquad \& \qquad U = U_k = \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{2}k_2\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$$\frac{d}{dt}(T+U) = 0 \qquad \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}Mr^2\right)\left(\frac{\dot{x}}{2r}\right)^2 + \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{2}k_2\left(\frac{x}{2}\right)^2\right] = 0$$

$$m\ddot{x}\dot{x} + \frac{3}{8}M\ddot{x}\dot{x} + k_1\dot{x}x + \frac{1}{4}k_2\dot{x}x = 0$$

- $\left(m+\frac{3}{8}M\right)\ddot{x}+\left(k_1+\frac{k_2}{4}\right)x=0$

- معادله حرکت : $\ddot{x}+\left(\frac{k_1+\frac{k_2}{4}}{m+\frac{3}{8}M}\right)x=0$

- فرکانس طبیعی $\omega_n=\sqrt{\frac{k_1+\frac{k_2}{4}}{m+\frac{3}{8}M}}$

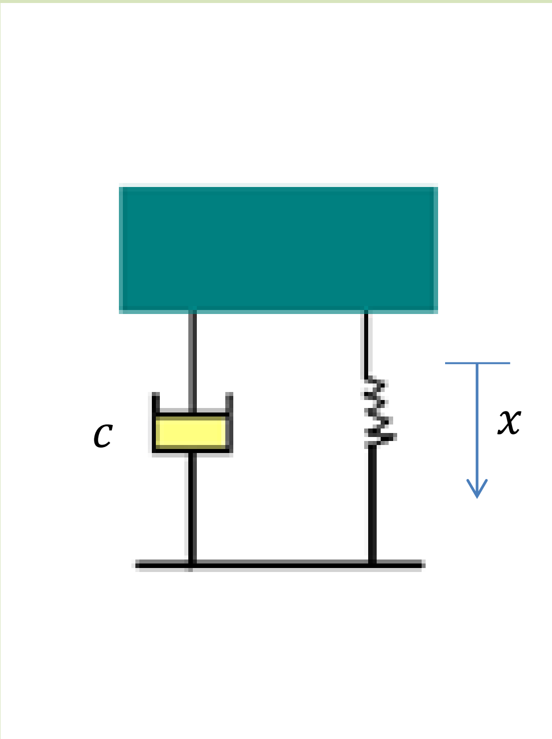
- تمرین: فرض کنید جرمی را بدون اینکه اثر آن در فنر ظاهر شده باشد به فنری آویزان و آن را گرفته و رها کنیم. معادله حرکت سیستم را استخراج و آن را با زمانی که سیستم را آرام آرام به تعادل استاتیکی رسانده ایم و سپس از تعادل خارج کرده ایم مقایسه کنید.(شکل در صفحع 8)

- حل) در این حالت جابجایی را نسبت به طول آزاد فنر می سنجیم ولذا داریم: $\delta_{st}=0$

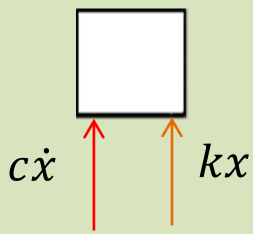
- $T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$, $U_k=\frac{1}{2}kx^2$, $U_{mg}=-mgx$

- $\frac{d}{dt}\left[T + U_k + U_{mg}\right] = 0$

- $m\ddot{x}\dot{x} + k\dot{x} - mg\dot{x} = 0$ $\qquad \ddot{x} + \left(\frac{k}{m}\right)x = mg$



- روش نیوتن برای استخراج معادلات ؛



میرایی :
- 1-) خشک
- 2-) ترمو الاستیک
- 3-) ویسکو الاستیک
- 4-) ویسکاز

- نکته: دمپر انرژی را با نرخ (متناسب) با سرعت جسم کم می کند. $(c\dot{x})$

- در این حالت چون اصل بقای انرژی صادق نیست،لذا از قوانین نیوتن حاکم بر معادلات حرکت استفاده می کنیم.

- در حالت کلی داریم؛

$$\begin{cases} \sum F_x = ma_x \\ \sum F_y = ma_y \\ \sum M_G = [\bar{I}\alpha + ma_G.d] = I_o\alpha \end{cases}$$

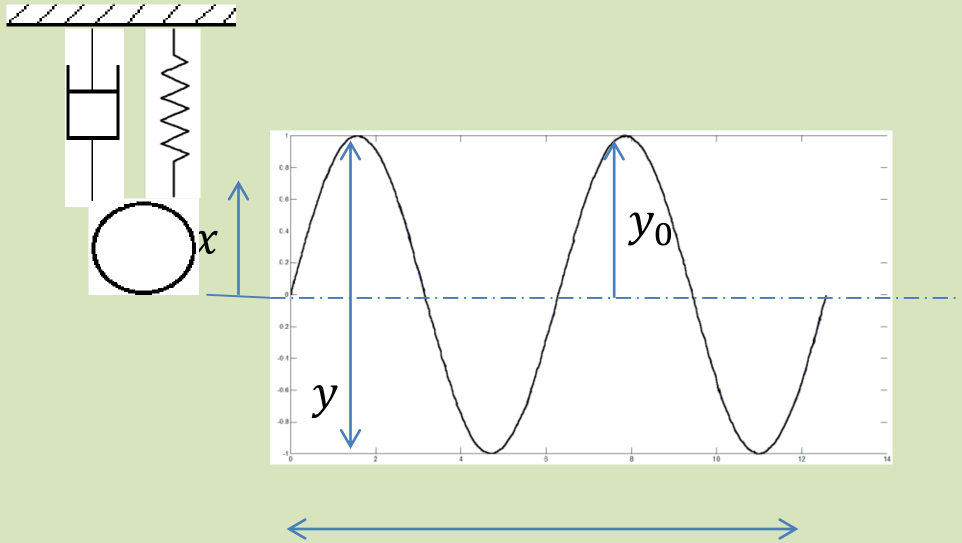
نقطه دوران

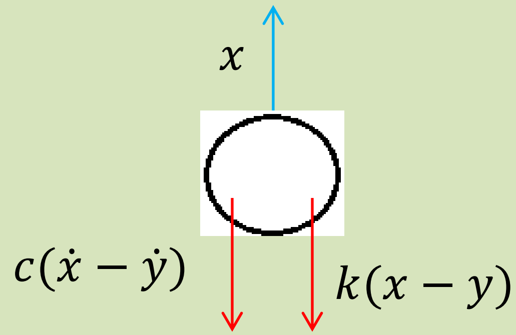
- حال معادله حرکت را برای شکل فوق تعیین میکنیم.

- $\sum F_x = m\ddot{x} \qquad -c\dot{x} - kx = m\ddot{x} \qquad m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$

- معادله حرکت؛ $\boxed{\ddot{x} + \left(\frac{c}{m}\right)\dot{x} + \left(\frac{k}{m}\right)x = 0}$

- مثال: اگر خودرویی با سرعت v بر جاده ای که به صورت سینوسی مدل شده است، حرکت کند معادله حرکت آن را محاسبه کنید.





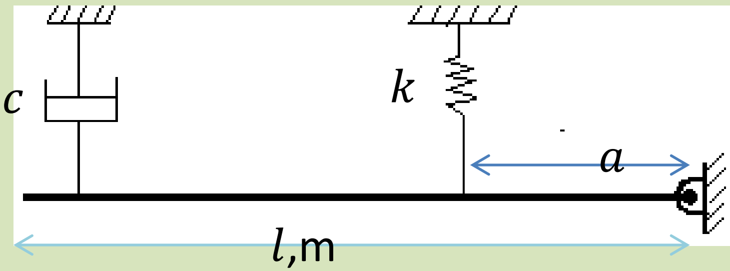
- $v = \frac{l}{T}$ $\quad l$

- $\sum F_x = ma_x \qquad -c(\dot{x} - \dot{y}) - k(x - y) = m\ddot{x}$

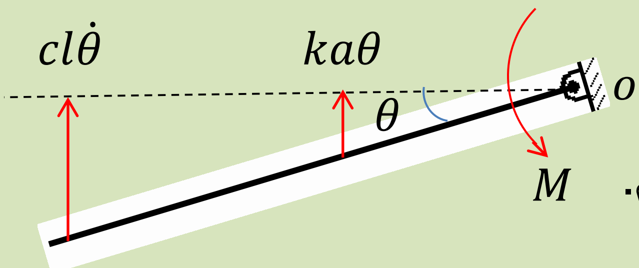
- $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{y} + ky$ معادله حرکت

$$y = y_0 \sin(\omega_n t) = y_0 \sin(\frac{2\pi}{T} t) = y_0 \sin(\frac{2\pi}{\frac{l}{v}} t) = y_0 \sin(\frac{2\pi v}{l} t)$$

- مثال: معادله حرکت و فرکانس طبیعی سیستم را تعیین کنید.
-
- (چون وزن میله بر وضعیت فنر اثر میگذارد،وزن رادر
- نظر نمی گیریم)

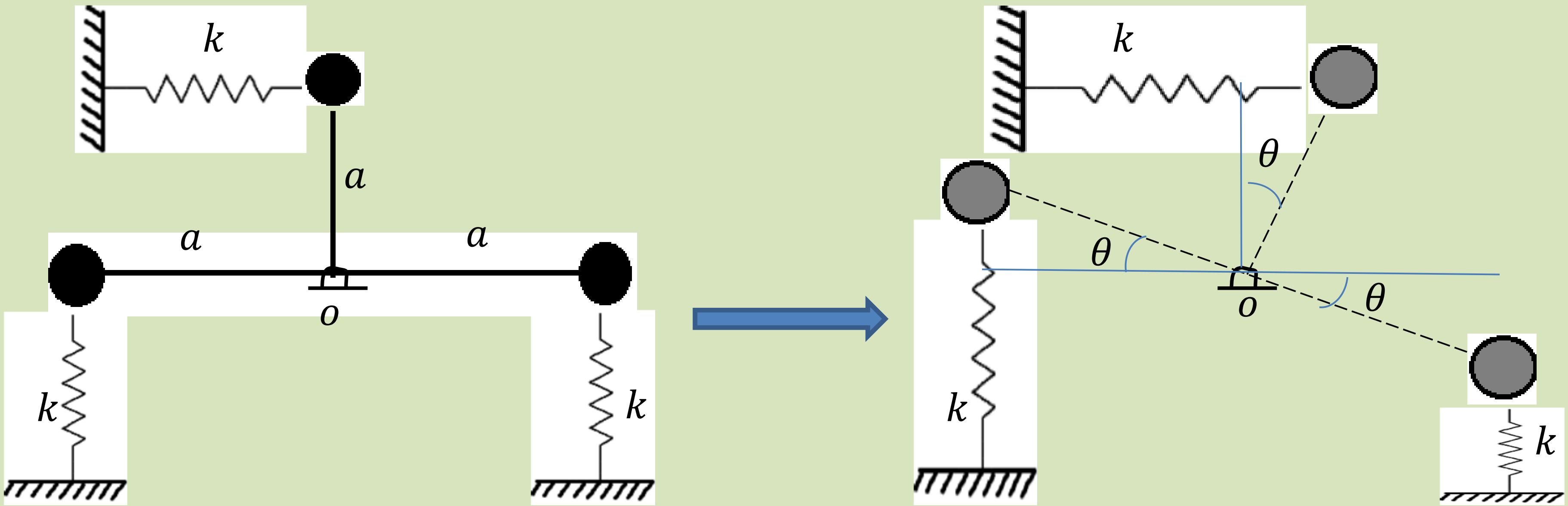


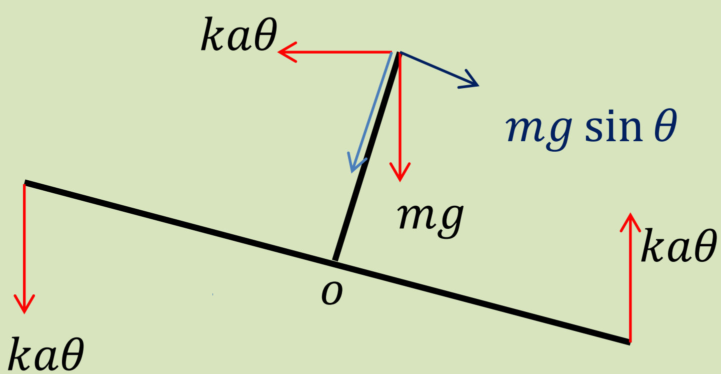
- $F_k = kx = k(a\sin\theta) = ka\theta$



- $F_d = c\dot{x} = c(l\dot{\theta})$
- *جهت مثبت گشتاور را در جهت افزایش θ میگیریم.
- $\sum M_o = I_o\alpha$ $\qquad -ka\theta(a\cos\theta) - cl\dot{\theta}(l\cos\theta) = (\frac{1}{3}ml^2)\ddot{\theta}$ $\qquad \cos\theta \approx 1$
- $\frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta} + cl^2\dot{\theta} + ka^2\theta = 0$ $\qquad \ddot{\theta} + (\frac{3c}{m})\dot{\theta} + \left(\frac{ka^2}{\frac{1}{3}ml^2}\right)\theta = 0$ معادله حرکت
- $\omega_n = \sqrt{\left(\frac{ka^2}{\frac{1}{3}ml^2}\right)}$

- مثال: معادله حرکت وفرکانس طبیعی را بیابید.(جرم میله ها قابل چشم پوشی وجرم وزنه ها mاست.)

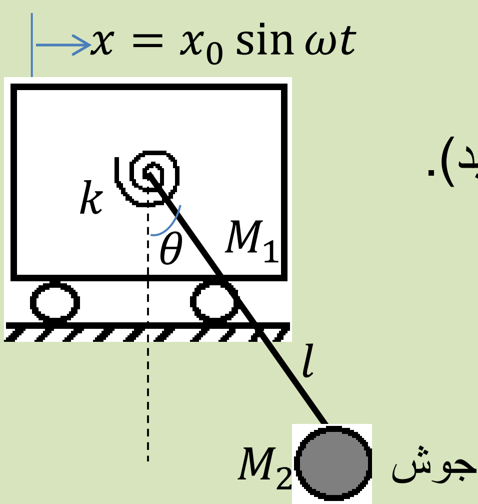


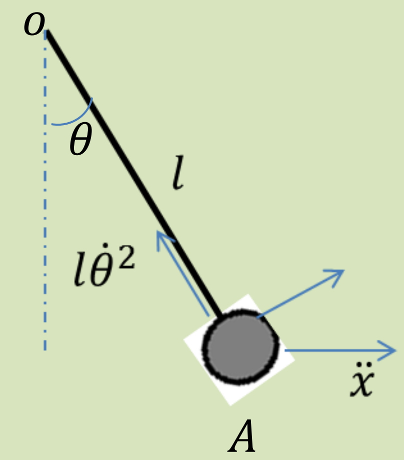


$$\sum M_o = I_o \alpha$$

- $-ka\theta(a) - ka\theta(a) - ka\theta(a) + mg\sin\theta\,(a) = I_o\ddot{\theta}$
- $\sin\theta \approx \theta$ وداریم $J_o = \cancel{\bar{J}} + ma^2 = ma^2$
- $-3ka^2\theta + mga\theta = \overbrace{(ma^2 + 2ma^2 + ma^2)}\ddot{\theta}$
- $\ddot{\theta} + \underbrace{\left(\frac{3ka^2 - mga}{3ma^2}\right)}_{{\omega_n}^2}\theta = 0$

- تمرین: مثال فوق را با در نظر گرفتن جرم میله ها(M) حل کنید.
- مثال: معادله حرکت سیستم را استخراج کنید(از اصطکاک صرفنظر کنید).





$$\begin{cases} a_t = \bar{I}\alpha \\ a_n = r\omega^2 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} a_t = \bar{I}\ddot{\theta} \\ a_n = l\dot{\theta}^2 \end{matrix} \qquad \& \quad a_A = a_o + a_{A/o}$$

- $\sum F_x = \sum_{i=1}^{2} M_i a_i$ $\qquad \sum M_o = \cancel{\bar{I}}\alpha + M_2\bar{a}.d = M_2 l\ddot{\theta}(l) + (M_2\ddot{x}\cos\theta)l$

(جرم متمرکز است)

- $-k\theta - M_2 g \sin\theta \,.\, l = M_2 l^2\ddot{\theta} + M_2 l\ddot{x}\cos\theta$
- $M_2 l^2\ddot{\theta} + k\theta + M_2 g l\theta = -M_2 l\ddot{x} = M_2 l x_0\omega^2 \sin\omega t$
- $\ddot{\theta} + \underbrace{\left(\frac{k}{M_2 l^2} + \frac{g}{l}\right)}_{{\omega_n}^2}\theta = \frac{x_0\omega^2}{l}\sin\omega t$

بررسی رفتار سیستم تحت ارتعاش آزاد میرا؛

اکنون می خواهیم پاسخ معادله دیفرانسیل حرکت را بدست آوریم.

$$\ddot{x} + \left(\frac{c}{m}\right)\dot{x} + \left(\frac{k}{m}\right)x = 0$$

در معادله فوق تعریف می کنیم :

$$\begin{cases} \dfrac{k}{m} = {\omega_n}^2 \\ \dfrac{c}{m} = 2\zeta\omega_n \end{cases}$$

که cضریب میرایی ویسکوزوζنسبت میرایی استانداردداست

معادله فوق یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دو همگن با ضرایب ثابت است.با استفاده از معادله مشخصه داریم؛

$$s^2 + (2\zeta\omega_n)s + {\omega_n}^2 = 0$$

- $S_{1,2} = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{4\zeta^2{\omega_n}^2 - 4{\omega_n}^2}}{2} = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\,\omega_n$

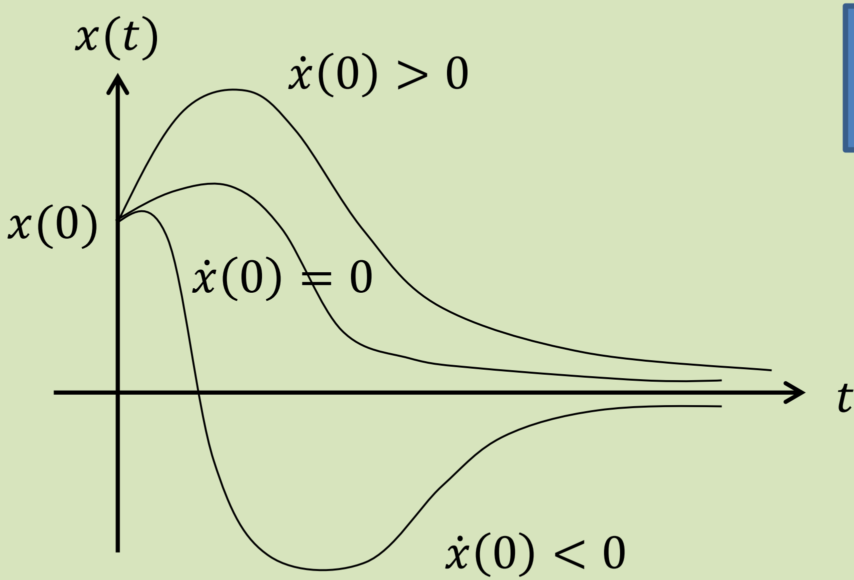
- 1-) اگر $\zeta > 1$ ؛ سیستم تندمیرا.

-
- $if \quad \zeta > 1 : \begin{cases} S_1 = -\zeta\omega_n + \sqrt{\zeta^2 - 1}\,\omega_n \\ S_2 = -\zeta\omega_n - \sqrt{\zeta^2 - 1}\,\omega_n \end{cases}$ دوریشه حقیقی متمایز
-

- یاد آوری : در معادلات دیفرانسیل با ضرایب ثابت؛

- $x(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} = c_1 e^{\left(-\zeta\omega_n + \sqrt{\zeta^2 - 1}\ \omega_n t\right)} + c_2 e^{\left(-\zeta\omega_n - \sqrt{\zeta^2 - 1}\ \omega_n t\right)}$

-
- بررسی فیزیکی ;
  - 1-) پاسخ به صورت نمایی
  - 2-) $if \quad t \longrightarrow \infty \Longrightarrow x(t) \longrightarrow 0$
- به این پاسخ پاسخ فوق میرا میگویند.

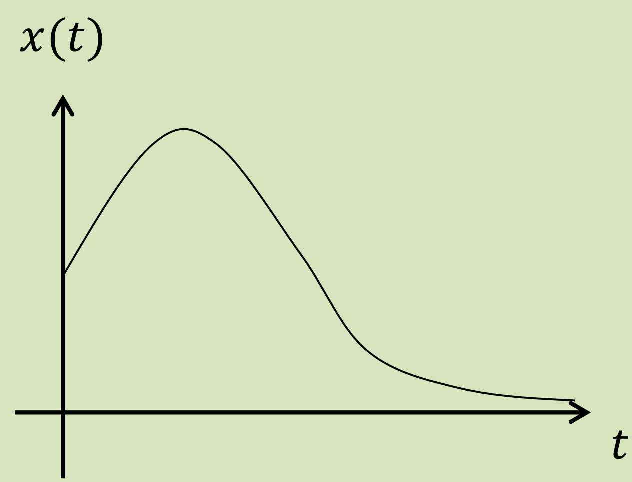


$x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$ پاسخ

2-) اگر $\zeta = 1$ ؛ میرای بحرانی.

- $if \quad \zeta = 1 \;:\quad S_1 = S_2 = -\omega_n$ یک ریشه مضاعف

$x(t) = C_1 e^{-\omega_n t} + C_2 t e^{-\omega_n t}$ پاسخ



بررسی فیزیکی;
- جواب به صورت نمایی
- $t \to \infty \quad \Longrightarrow \quad x \to 0$

3-): اگر $\zeta < 1$: کندمیرا

$if\ \zeta < 1 \Rightarrow \begin{cases} S_1 = -\zeta\omega_n + \sqrt{1-\zeta^2}\ \ \omega_n i \\ \\ S_2 = -\zeta\omega_n - \sqrt{1-\zeta^2}\ \ \omega_n i \end{cases}$ دو ریشه مختلط

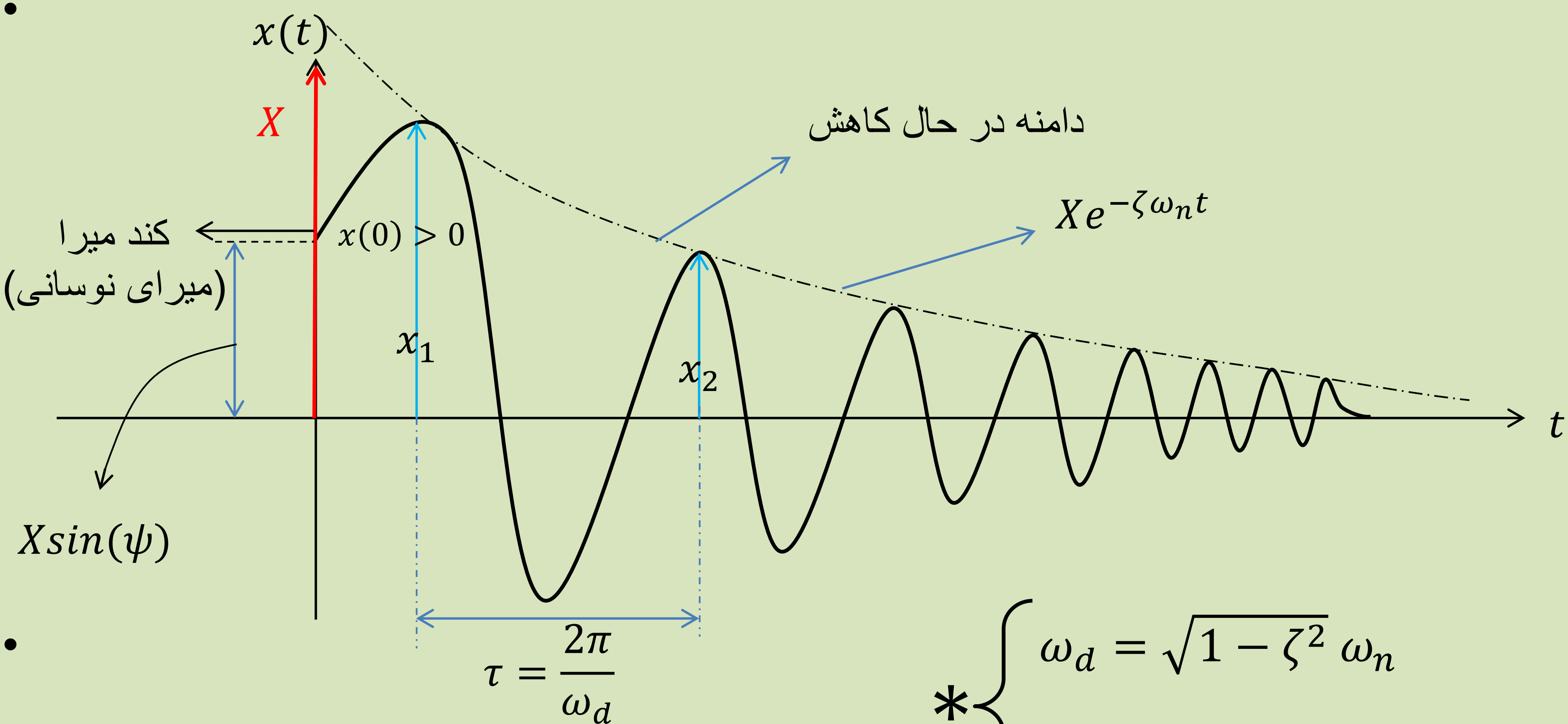
$$a \pm bi = e^{at}\,[C_1 \sin(bt) + C_2 \cos(bt)] = e^{at}\,[C \sin(bt + \psi)]$$

از شرایط اولیه

$$\Rightarrow \quad x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\,[\,C_1 \sin(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t) + C_2 \cos(\sqrt{1-\zeta^2}\ \omega_n t)\,]$$

یا $\quad x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\,[A \sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\ \omega_n t + \psi\right)]$

بررسی فیزیکی $\begin{cases} \text{پاسخ ترکیبی از سینوسی و نمایی است.} \\ if \quad t \to \infty \quad ; \quad x(t) \to 0 \\ \text{فرکانس نوسانات } \dfrac{\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n}{\omega_d} \text{ است.} \end{cases}$



$$
*\begin{cases} \omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n \\ \omega_d = \dfrac{2\pi}{\tau} \longrightarrow \tau = \dfrac{2\pi}{\omega_d} \end{cases}
$$

- $$\frac{X_1}{X_2} = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}\,[\cancel{A}\sin(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t+\psi)]}{e^{-\zeta\omega_n (t+\tau)}[\cancel{A}\sin(\sqrt{1-\zeta^2}\,(t+\tau)\omega_n+\psi)]}$$

- چون x_1وx_2 ماکزیمم دامنه هستند، پس sin به عدد 1 رسیده و داریم؛

- $$\frac{x_1}{x_2} = e^{\zeta\omega_n t} = e^{\zeta\omega_n \frac{2\pi}{\omega_d}} = e^{\zeta\omega_n \frac{2\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n}}$$

- $$\frac{x_1}{x_2} = e^{\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \qquad \ln\frac{x_1}{x_2} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cong 2\pi\zeta$$

$$(\zeta \ll 1)$$

- پاسخ

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}[C_1 \sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t\right)]$$

$$= Xe^{-\zeta\omega_n t}[\sin(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t + \psi)]$$

- *در این حالت فرکانس نوسانات سیستم، ω_d است که مقدار آن برابر است با؛

- $$\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n$$

- در نوسانات میرا،پریود نوسان بیشتر از حالتی است که سیستم میرایی ندارد.

- $$\begin{cases} T_n = \dfrac{2\pi}{\omega_n} \\ \\ T_d = \dfrac{2\pi}{\omega_d} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n} \end{cases} \longrightarrow \quad T_d > T_n$$

- کاهش لگاریتمی؛
- همچنین در این حالت دامنه نوسان در هر سیکل اندکی کاهش می یابد.این موضوع را به صورت لگاریتم طبیعی نسبت هر دو دامنه متوالی تعریف می کنند.

- $$\delta = \ln\frac{X_1}{X_2} = \ln\frac{\cancel{X}e^{-\zeta\omega_n t_1}\cancel{[\sin(\omega_d t_1+\psi)]}}{\cancel{X}e^{-\zeta\omega_n (t_1+T_d)}\cancel{[\sin(\omega_d (t_1+T_d)+\psi)]}} = \zeta\omega_n T_d$$

- $$= \zeta\cancel{\omega_n}\frac{2\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}\,\cancel{\omega_n}}$$

$$\boxed{\delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

- مثال : پاسخ یک سیستم به صورت $x(t) = 2e^{-5t} + te^{-5t}$ است.خصوصیات سیستم را
- شناسایی کنید.(m=1kg)

- حل) پاسخ شبیه به حالت میرای بحرانی است.

- $\omega_n = 5$ $\qquad \sqrt{\frac{k}{m}} = 5$ $\qquad \sqrt{k} = 5$ $\qquad k = 25({}^{N}/_{m})$ $\qquad \zeta = 1$

- $\frac{C}{m} = 2\zeta\omega_n$ $\qquad C = 2 \times 1 \times 5 = 10(Hz)$
- $x(t) = 2e^{-5t} + te^{-5t} = C_1 e^{-\omega_n t} + C_2 t e^{-\omega_n t}$ $\qquad \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = 1 \end{cases}$
- $\dot{x}(0) = \checkmark$ $\qquad , \qquad x(0) = 2$

- مثال : فرض کنید پاسخ یک سیستم به صورت $x(t) = 2e^{-5t} + 3e^{-2t}$ است.خصوصیات سیستم
- را شناسایی کنید.$(m = 1kg)$

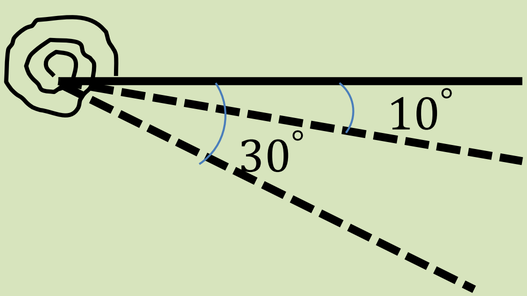
- پاسخ $(S_1 \& s_2)$ دو عدد حقیقی مجزااست.پس نوسان از نوع تندمیراست.

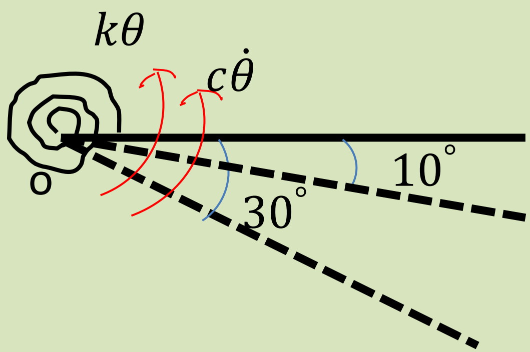
$$\begin{cases} S_1 = -\zeta\omega_n + \sqrt{\zeta^2 - 1}\,\omega_n = -2 \\ \\ S_2 = -\zeta\omega_n - \sqrt{\zeta^2 - 1}\,\omega_n = -5 \end{cases}$$

$$-2\zeta\omega_n = -7 \qquad \text{(معلوم}m\text{)} \longrightarrow \omega_n \checkmark$$

$$\frac{5}{2} = \frac{-\zeta\omega_n + \sqrt{\zeta^2 - 1}\,\omega_n}{-\zeta\omega_n - \sqrt{\zeta^2 - 1}\,\omega_n} \longrightarrow \zeta \checkmark$$

- مثال : یک درب متصل به یک دمپر و فنر پیچشی است.هنگامی که درب به اندازه 30° منحرف
- می شود،پس از طی یک سیکل کامل در وضعیت 10° قرار می گیرد.اگر ممان اینرسی درب حول
- لولا 14 باشد، $C,k\&\zeta$ را تعیین کنید.



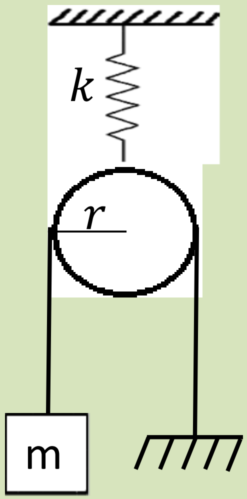


- $\sum M_o = J\alpha \qquad -k\theta - c\dot{\theta} = J\ddot{\theta}$
- $J\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + k\theta = 0$
- حرکت کندمیراست $\qquad \ln\frac{X_1}{X_2} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$
- $\ln\frac{30}{10} = \ln 3 = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad (\ln 3)^2 = (\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}})^2 \qquad (\ln 3)^2.(1-\zeta^2) = 4\pi^2\zeta^2$
- $(4\pi^2 + \ln 3^2).\zeta^2 = (\ln 3)^2 \qquad \zeta$
- $T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} \qquad 1.5 = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}.\omega_n} \qquad \omega_n$
- $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{J}} \qquad k$

-
- $j\ddot{\theta} + C\dot{\theta} + k\theta = 0$
- $\ddot{\theta} + 2\zeta\omega_n\dot{\theta} + {\omega_n}^2\theta = 0$
- $\frac{C}{j} = 2\zeta\omega_n \longrightarrow$ C
- C=10.489

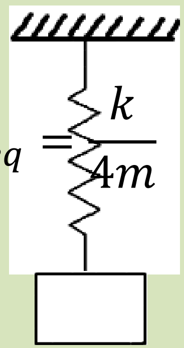
- تمرین (فصل 2) :
- 55- 53- 50- 44- 42- 41- 32- 25- 24- 21- 16- 14- 11- 10 – 6 -5

معادل کردن یک سیستم؛



$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 \qquad U = \frac{1}{2} k\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$$\frac{d}{dt}(T + U) = 0 \qquad \ddot{x} + \frac{k}{4m} x = 0$$



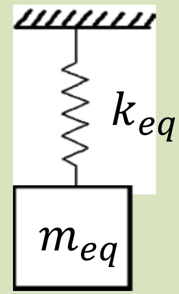
$$k_{eq} = \frac{k}{4m}$$

$$m_{eq} = 1$$

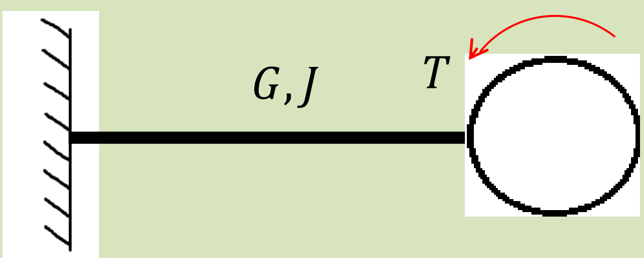
• معادل سازی ؛

• روش اول : مساوی قرار دادن جابجایی ها (تعیین K_{eq})

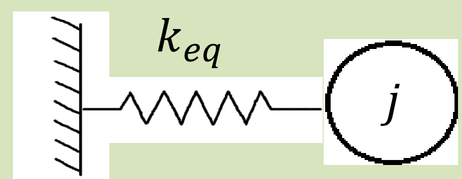
$\equiv$



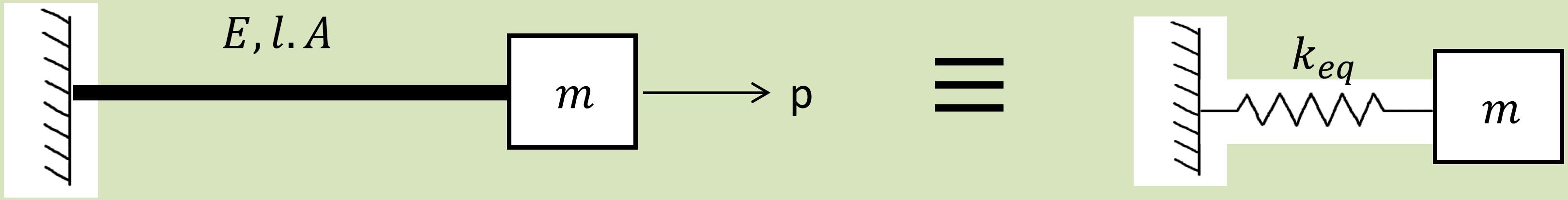
• $\delta_{st} = \frac{Pl^3}{3EI} = \frac{P}{k_{eq}}$ $\qquad$ $k_{eq} = \frac{3EI}{l^3}$



$\equiv$



• $\theta = \frac{Tl}{GJ}$ $\qquad$ $\theta = \frac{T}{k_{eq}}$ $\qquad$ $k_{eq} = \frac{GJ}{l}$

- 

- $\delta = \frac{Pl}{AE}$ $\delta = \frac{P}{k_{eq}}$ $k_{eq} = \frac{AE}{l}$

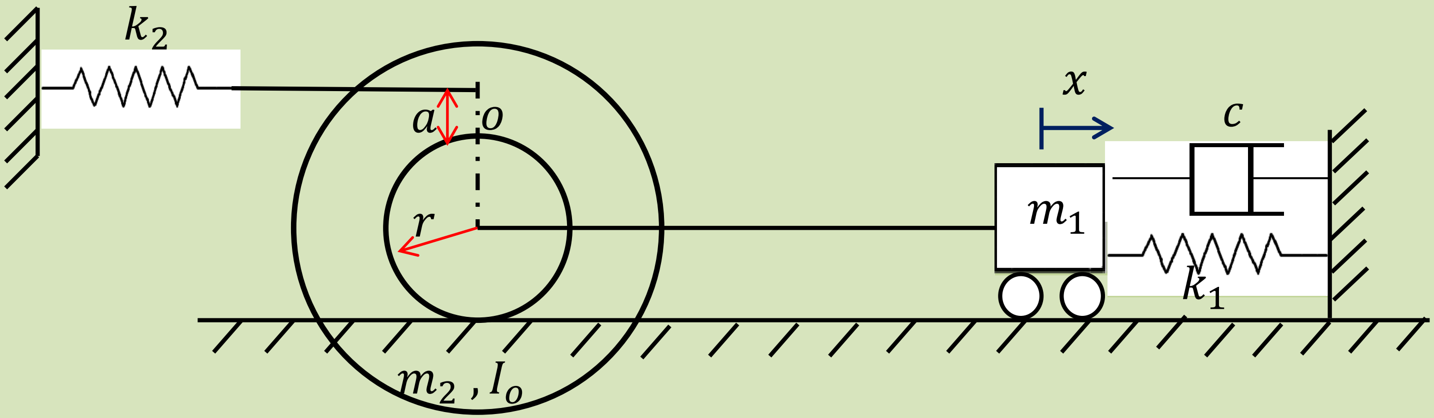
- روش دوم : برابر قرار دادن انرژی ها

- $\frac{1}{2} k_{eq} x^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} k_{\mathrm{i}} {x_i}^2$

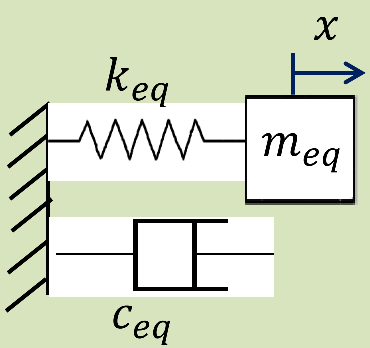
- $\frac{1}{2} M_{eq} \dot{x}^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_{\mathrm{i}} {\dot{x}_i}^2$

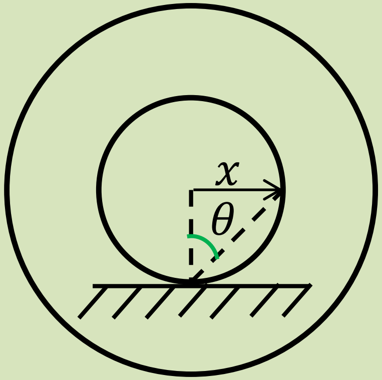
- $\frac{1}{2} C_{eq} \dot{x}^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} c_{\mathrm{i}} {\dot{x}_i}^2$

- مثال : معادل سیستم زیر را در محل جرم m_1 بدست آورید.



- (حل





$$\theta = \frac{x}{r}$$

- $T_{eq} = T_{\text{كل}} = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 (r\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} I_o \dot{\theta}^2$

- $T_{eq} = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 r^2 (\frac{\dot{x}}{r})^2 + \frac{1}{2} I_o (\frac{\dot{x}}{r})^2 = \frac{1}{2} M_{eq} \dot{x}^2$

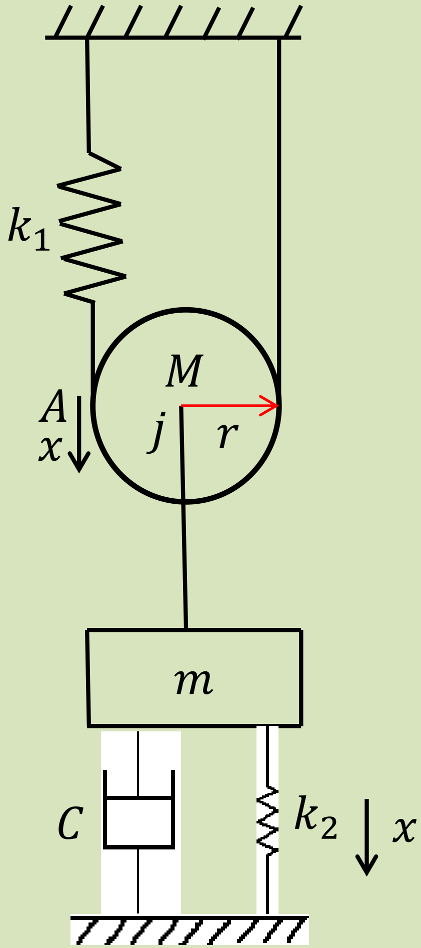
-
- $$M_{eq} = m_1 + m_2 + \frac{I_o}{r^2}$$

- $U = \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{2}k_2[(r+a)\theta]^2 = \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{2}k_2(r+a)^2\left(\frac{x^2}{r^2}\right) = \frac{1}{2}k_{eq}x^2$

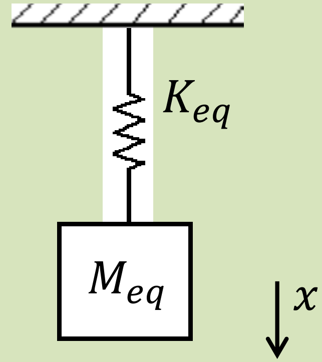
- $$k_{eq} = k_1 + \frac{k_2+(r+a)^2}{r^2}$$

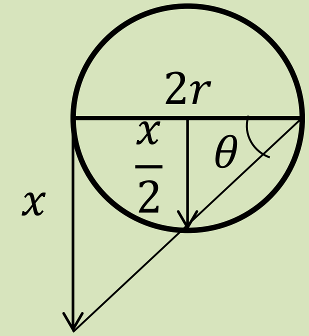
- $\frac{1}{2}C_{eq}\dot{x}^2 = \frac{1}{2}C\dot{x}^2 \Rightarrow C_{eq} = C$

تمرین : معادل سیستم زیر را در محل A بدست آورید.

- 

$\equiv$





- $x = 2r\theta$

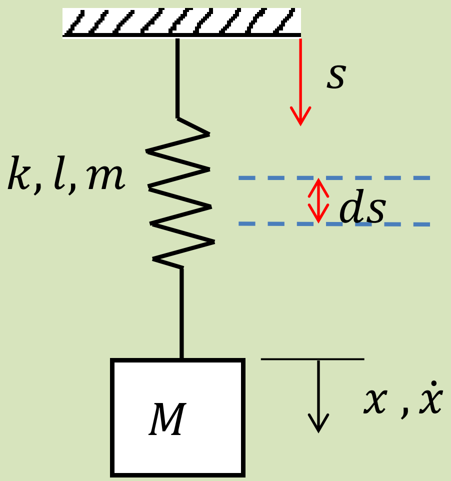
- $U_k = \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{2}k_2(\frac{x}{2})^2 = \frac{1}{2}[k_{eq}]x^2$

- $k_{eq} = k_1 + \frac{k_2}{4}$

- $T = \frac{1}{2}M(\frac{\dot{x}}{2})^2 + \frac{1}{2}\bar{J}(\frac{\dot{x}}{2r})^2 + \frac{1}{2}m(\frac{\dot{x}}{2})^2 = \frac{1}{2}\ [m_{eq}]\dot{x}^2$ $\qquad \frac{1}{2}C_{eq}\dot{x}^2 = \frac{1}{2}C_1(\frac{\dot{x}}{2})^2$

- $C_{eq} = \frac{1}{4}C_1$ $\qquad \omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}}$

- جرم معادل یک فنر جرم دار؛



- جرم فنر : m
- طول فنر : l

جرم واحد طول فنر : p

$$\mathrm{p} = \frac{m}{l}$$

فاصله از سقف : s

- طول المان : ds
- جرم المان : pds
- سرعت المان : $\frac{s}{l}\dot{x}$

- انرژی جنبشی المان $dK = \frac{1}{2}(m_{el})(\dot{x}_{el})^2 = \frac{1}{2}(\frac{m}{l}ds)(\frac{s}{l}\dot{x})^2 = \frac{1}{2}\frac{m\dot{x}^2}{l^3}\ s^2 ds$

- انرژی جنبشی ذخیره شده در کل فنر $K = \int_0^l \frac{1}{2}\frac{m\dot{x}^2}{l^3}\ s^2 ds = \frac{1}{2}\frac{m\dot{x}^2}{l^3}\ \int_0^l s^2 ds\ = \frac{1}{2}\frac{m\dot{x}^2}{\cancel{l^3}}\ \frac{\cancel{l^3}}{3}$

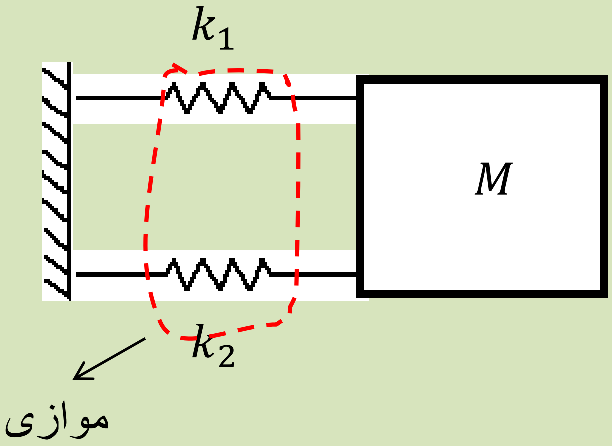
- $= \frac{1}{2}\left[\frac{m}{3}\right]\dot{x}^2$ $\Rightarrow$ $\boxed{m_{eff\ \text{فنر}} = \frac{m}{3}}$

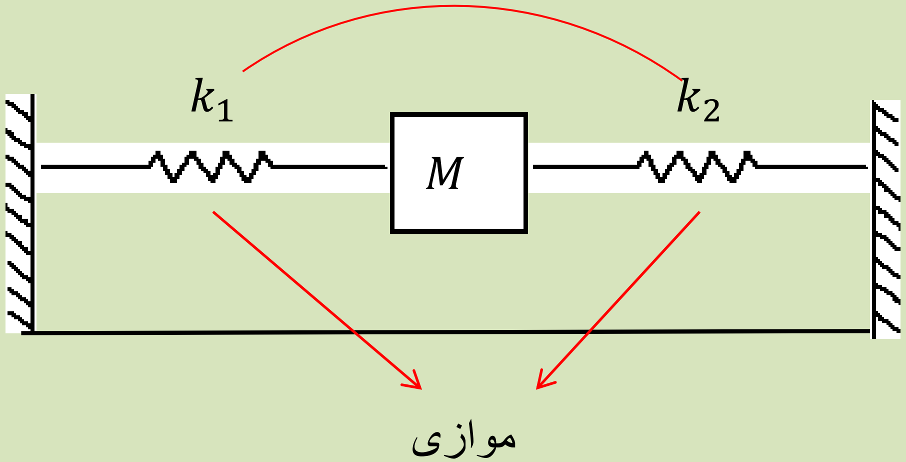
- بنا بر این وقتی المان های فنر حرکت می کنند،سرعت همه آنها $\dot{x}$ نیست.مثل این است که تنها
- $\frac{1}{3}$ جرم فنر دارای سرعت $\dot{x}$ است.
- لذا انرژی جنبشی کل سیستم به قرار زیر است؛

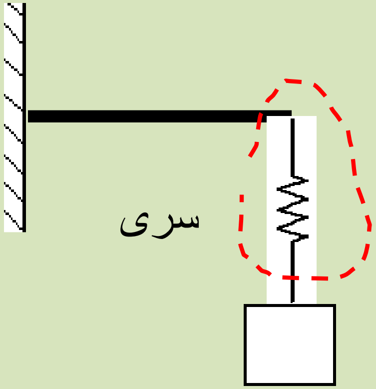
- $K_{tot}=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}\left[\frac{m}{3}\right]\dot{x}^2$ $\qquad K_{tot}=\frac{1}{2}\left[M+\frac{m}{3}\right]\dot{x}^2$

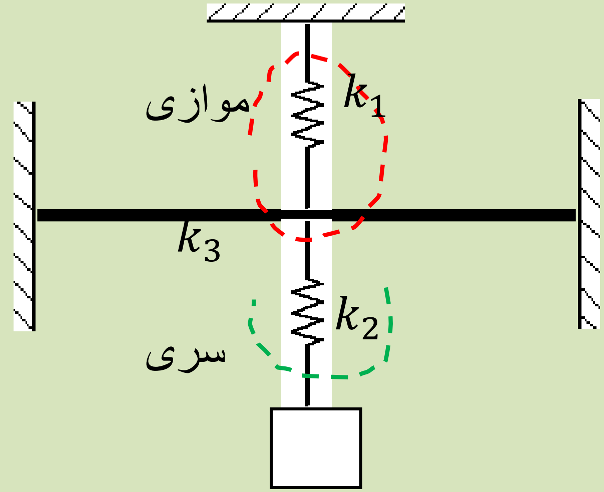
- فنرهای سری و موازی ؛

- در فنر های موازی اگر سختی یکی از فنرها را به بینهایت برسانیم، سیستم باید قفل شود یا اینکه
- هر دو فنر جابجایی یکسانی را حس کنند.

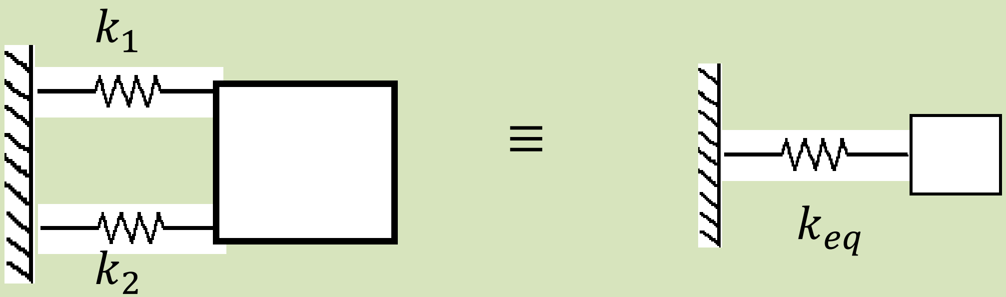








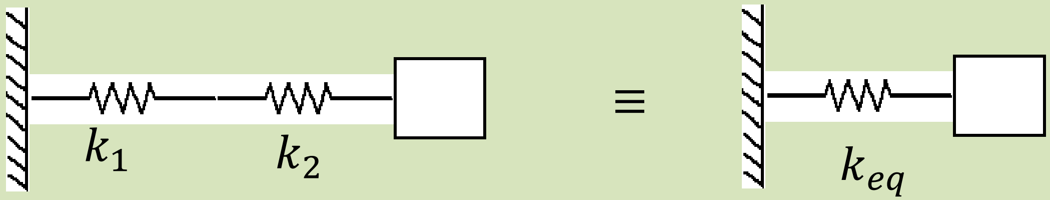
- موازی :

- 

- $\frac{F}{k_{eq}} = \frac{F}{k_1+k_2}$ $\boxed{k_{eq} = k_1 + k_2}$

- روش انرژی; $\frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{2}k_2x^2 = \frac{1}{2}k_{eq}x^2$ $\boxed{k_{eq} = k_1 + k_2}$

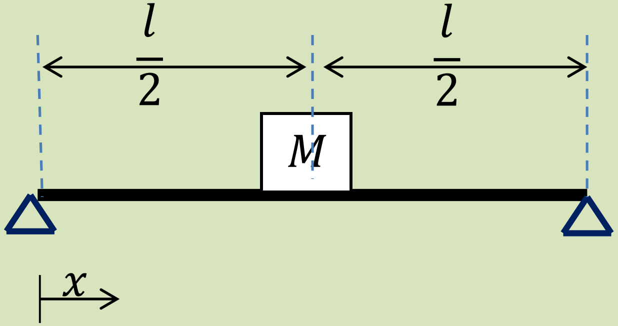
- سری؛

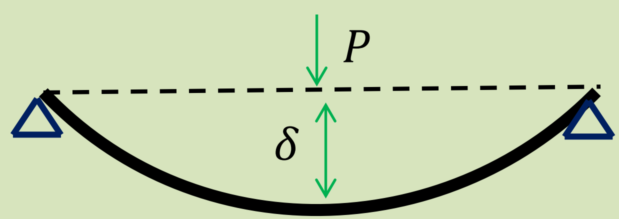


$$\frac{F}{k_{eq}} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2}$$

$$\boxed{\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}$$

مثال : در وسط یک تیر به جرم m_d با تکیه گاه ساده جرم متمرکز M قرارگرفته است.جرم موثر سیستم را در وسط تیر ونیز فرکانس طبیعی اصلی را تعیین کنید.





$$\delta = \frac{Pl^3}{48EI} \qquad P = \frac{48EI}{l^3}.\delta \qquad (P = k.\delta) \longrightarrow k = \frac{48EI}{l^3}$$

اگر جرم تیر را در نظر نگیریم و آنرا اندکی پایین کشیده و رها کنیم؛

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{48EI}{Ml^3}}$$

حال اگر جرم تیر را نیز لحاظ کنیم؛

از مقاومت مصالح داریم

خیز تیر; $y(x) = y_{max}.\left[\frac{3x}{l} - 4\left(\frac{x^3}{l}\right)\right] \qquad 0 \le x \le \frac{l}{2} \qquad \left(y_{max} = \frac{Pl^3}{48EI}\right)$

با مشتق گیری از رابطه فوق نسبت به زمان،سرعت هر المان به فاصله x از مبدأ بدست می آید.(xبا زمان تغییر نمی کند!)

$$\dot{y}(x) = \dot{y}_{max} \cdot \left[\frac{3x}{l} - 4\left(\frac{x^3}{l}\right)\right] \qquad 0 \le x \le \frac{l}{2}$$

انرژی جنبشی ذخیره شده در المانی به طول dx وبه فاصله x از مبدأ؛

$$dK = \frac{1}{2}(dm)V^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{l}dx\right)\{\dot{y}_{max}[\frac{3x}{l} - 4\left(\frac{x^3}{l}\right)]\}^2$$

- مقدار فوق مربوط به نصف تیر است.انرژی ذخیره شده در کل تیر ؛

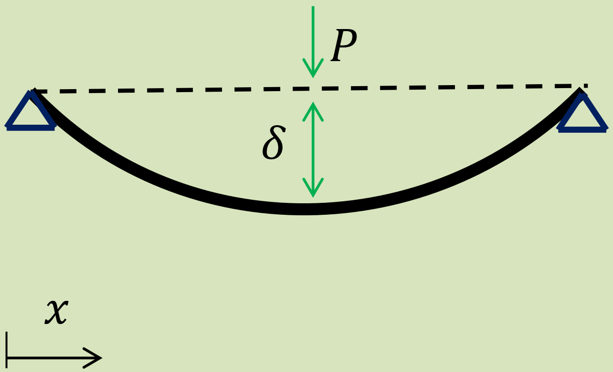
- $$K = 2 \times \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{1}{2} \frac{m}{l} (\dot{y}_{max})^2 \left\{ \left(\frac{9x^2}{l^2} + \frac{16x^6}{l^6} - \frac{24x^4}{l^4} \right) \right] dx$$

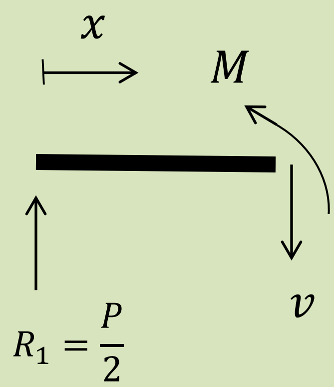
- $$= \frac{m}{l} (\dot{y}_{max})^2 \left[\frac{9x^3}{3l^2} + \frac{16x^7}{7l^6} - \frac{24x^5}{5l^4} \right]^{l/2} 0 = \mathrm{m}(\dot{y}_{max})^2 [0.485]$$

$$K = \frac{1}{2} M_{eff} V^2 \qquad \mathrm{m}(\dot{y}_{max})^2 [0.485] = \frac{1}{2} [0.485m] \dot{y}_{max}{}^2$$

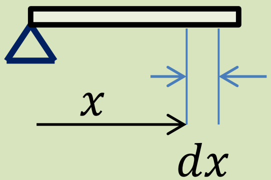
$$\boxed{M_{eff} = 0.485m} \qquad \boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{48EI}{(M+0.485m)l^3}}}$$

حل به روش دیگر؛





- $M = \frac{P}{2}x$ $\qquad EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P}{2}x$ $\qquad EI\frac{dy}{dx} = \frac{P}{4}x^2 + c_1$
- $EIy(x) = \frac{P}{12}x^3 + c_1 x + c_2$
- $B.C.(1);\qquad \Big|_{y=0}^{x=0} \longrightarrow c_2 = 0$
- $B.C.(2);\qquad \Big|_{\frac{dy}{dx}=0}^{x=l/_2} \longrightarrow c_1 = -\frac{Pl^2}{16}$
- $\Longrightarrow y(x) = \left(\frac{1}{EI}\frac{P}{12}x^3 - \frac{1}{EI}\frac{Pl^2}{16}x\right)$

- $(F = ky) \longrightarrow \quad P = k\delta \qquad y_{max} = \dfrac{Pl^3}{48EI}$
- $P = k.\dfrac{Pl^3}{48EI} \longrightarrow \quad k = \dfrac{48EI}{l^3}$
- $\Longrightarrow \quad y(x) = \dfrac{y_{max}}{y_{max}}\left(\dfrac{1}{EI}\dfrac{P}{12}x^3 - \dfrac{1}{EI}\dfrac{Pl^2}{16}x\right)$
- $y(x) = y_{max}\left[\dfrac{Px^3}{12EI}\,\dfrac{1}{y_{max}} - \dfrac{Pl^2x}{16}\,\dfrac{1}{y_{max}}\right] = y_{max}\left[\dfrac{Px^3}{12EI}.\dfrac{48EI}{Pl^3} - \dfrac{Pl^2x}{16EI}.\dfrac{48EI}{Pl^3}\right]$
- $y(x) = y_{max}\left[4\left(\dfrac{x}{l}\right)^3 - 3\left(\dfrac{x}{l}\right)\right]$
- 

$dm = \dfrac{dx}{l/2} m_d$ جرم المان

- $dT = \frac{1}{2}(dm)v^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{m_d}{l/_2}\,dx\right)\left\{\dot{y}_{max}\left[4\left(\frac{x}{l}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{l}\right)\right] + y_{max}\left(\cancel{\frac{4}{l^3}\dot{x}x^2} + \frac{3}{l}\dot{x}\right)\right\}^2$

- $T = \frac{1}{2}\int_0^{l/_2}\left(\frac{m_d}{l/_2}\right)\left(\dot{y}_{max}\left[4\left(\frac{x}{l}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{l}\right)\right]\right)^2 dx = \frac{1}{2}m_{ef}\dot{y}_{max}{}^2$

- $T = \frac{1}{2}\left(\frac{2m_d}{l}\right)\dot{y}_{max}{}^2\int_0^{l/_2}\left[4\left(\frac{x}{l}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{l}\right)\right]^2 dx = \frac{1}{2}m_{ef}\dot{y}_{max}{}^2 \qquad \left(\frac{x}{l} = u \quad dx = l\,du\right)$

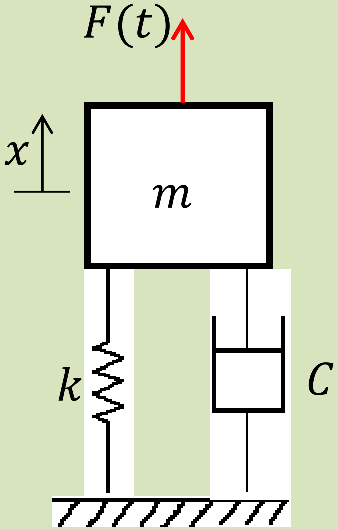
- $\int_0^{l/_2}\left[4\left(\frac{x}{l}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{l}\right)\right]^2 dx = \int_0^{l/_2}(4u^3 - 3u)^2 l\,du = \frac{17}{70}\,l$

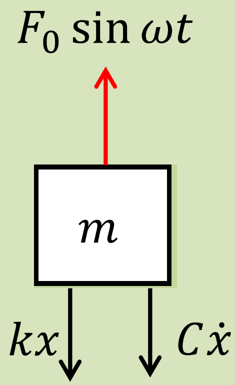
- $\cancel{\frac{1}{2}}\left(\frac{2m_d}{l}\right)\cancel{\dot{y}_{max}{}^2}\left(\frac{17}{70}\,l\right) = \cancel{\frac{1}{2}}m_{ef}\cancel{\dot{y}_{max}{}^2}$ $\qquad \boxed{m_{ef} = \frac{17}{35}m_d = 0.485m_d}$

- $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{48\,EI}{l^3}\cdot\frac{1}{M+m_{ef}}} \qquad \boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{48\,EI}{l^3(M+0.485m_d)}}}$

ارتعاشات اجباری

- می خواهیم ارتعاشات جسمی را که نیرویی به صورت مداوم به آن اثر می کند، بررسی کنیم.برای
- راحتی نیرو را هارمونیک فرض می کنیم.





- معادله حرکت به فرم زیر است؛
- $m\ddot{x} + C\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t$ $\qquad$ $\ddot{x} + \left(\frac{c}{m}\right)\dot{x} + \left(\frac{k}{m}\right)x = \left(\frac{F_0}{m}\right)\sin \omega t$
- معادله فوق یک معادله دیفرانسیل خطی ناهمگن از مرتبه 2 است.پاسخ این نوع معادلات شامل یک
- جواب عمومی (y_c) برای قسمت همگن و یک جواب خصوصی (y_p) برای قسمت ناهمگن است.
- یعنی ؛
- $\boxed{y(x) = y_c(x) + y_p(x)}$

- با توجه به اینکه چنانچه در سیستمی میرایی وجود داشته باشد،حل همگن با گذر زمان به صفر می رسد،لذا آنچه باقی می ماند ،پاسخ خصوصی سیستم می باشد.از این رو در ارتعاشات اجباری عمده موضوع بحث، پاسخ خصوصی سیستم می باشد.

- اکنون به بررسی جواب کلی معادله فوق می پردازیم.
- از قبل می دانیم پاسخ عمومی (حل قسمت همگن) این معادله به صورت زیر است؛

- $x_c(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\,[A\cos(\omega_d t) + B\sin(\,\omega_d t)\,]$
- حال پاسخ خصوصی؛
- یادآوری ریاضی؛ نمایش عدد مختلط در فرم های دکارتی،نمایی و قطبی؛

- $x = a + ib = Xe^{i\theta} = r[\cos\theta + i\sin\theta]$

- $a = Re(x) \quad , \quad b = Im(x)$ $\quad$ $\mathrm{X} = |x| = r = \sqrt{a^2+b^2}$ اندازه عدد مختلط

$$\theta = \begin{cases} \tan^{-1}(\frac{b}{a}) & if \quad b > 0 \\ \\ \pi + \tan^{-1}(\frac{b}{a}) & if \quad b < 0 \end{cases}$$

- $F_0\sin(\omega t) = Im(F_0 e^{i\omega t}) \quad , \quad e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t$

- حدس پاسخ خصوصی؛ $x(t) = Xe^{i\omega t}$
- مشتق گیری و جاگذاری در معادله؛
- $-mX\omega^2 e^{i\omega t} + CXi\omega e^{i\omega t} + kXe^{i\omega t} = F_0 e^{i\omega t}$
- $(-m\omega^2 + C\omega i + k)X = F_0 \qquad X = \frac{F_0}{(k-m\omega^2)+C\omega i} = \frac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(C\omega)^2}\; e^{i\tan^{-1}(\frac{C\omega}{k-m\omega})}}$
- $X = \frac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(C\omega)^2}}\, e^{-i\tan^{-1}\frac{C\omega}{k-m\omega^2}}$

پاسخ دینامیکی

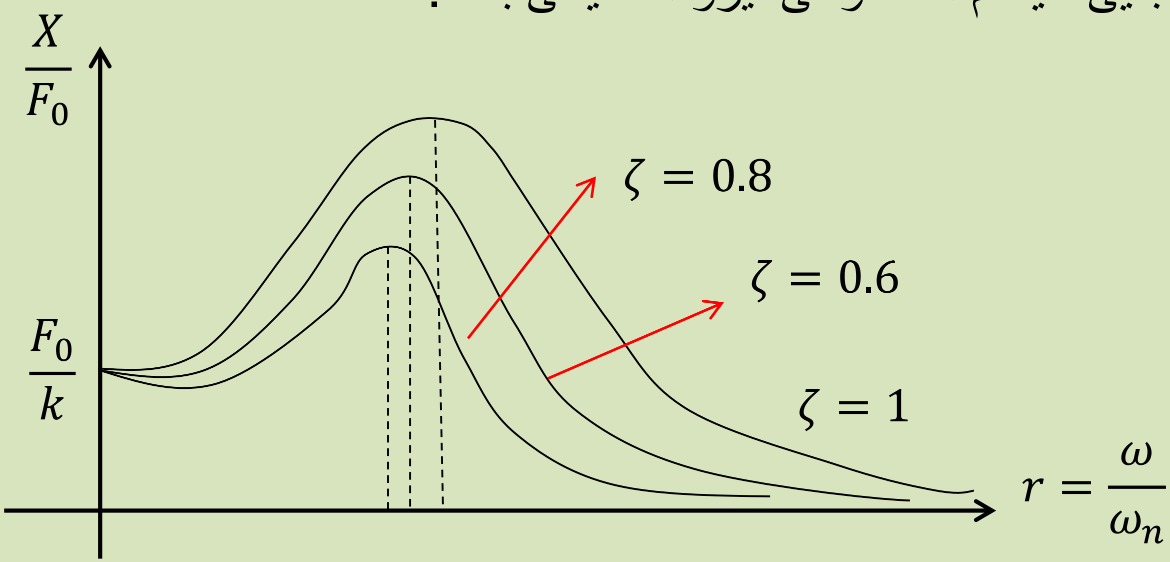
- $\boxed{x(t) = |X|\sin(\omega t - \varphi)}$ $\qquad \boxed{|X| = \frac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(C\omega)^2}}}$ $\qquad \boxed{\varphi = \tan^{-1}(\frac{C\omega}{k-m\omega^2})}$
- بیان پاسخ دینامیکی به فرم استاندارد؛
- $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \qquad \ddot{x} + (2\zeta\omega_n)\dot{x} + (\omega_n)^2 x = 0$

- $|X| = \dfrac{F_0}{k\sqrt{(1-\frac{m\omega^2}{k})^2+\frac{(C\omega)^2}{k^2}}}$ $\qquad |X| = \dfrac{F_0}{k\sqrt{(1-\frac{m\omega^2}{k})^2+\frac{(2\zeta\omega_n m)^2\omega^2}{k^2}}}$ $\qquad (\frac{m}{k} = \frac{1}{{\omega_n}^2})$

- $|X| = \dfrac{F_0}{k\sqrt{(1-\frac{\omega^2}{{\omega_n}^2})^2+(\frac{4\zeta^2{\omega_n}^2}{{\omega_n}^4})\omega^2}}$ $\qquad (\frac{\omega}{\omega_n} = r)$ $\qquad \boxed{|X| = \dfrac{F_0}{k\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}}$

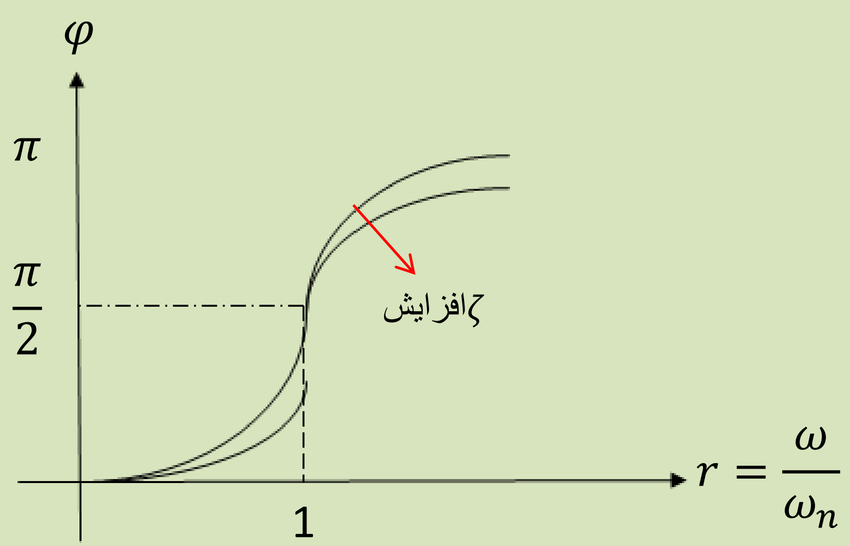
- $\boxed{\varphi = \tan^{-1}(\frac{2\zeta r}{1-r^2})}$

- در معادله بدست آمده $\frac{F_0}{k}$ برابر جابجایی سیستم است،وقتی نیرو استاتیکی باشد.
-

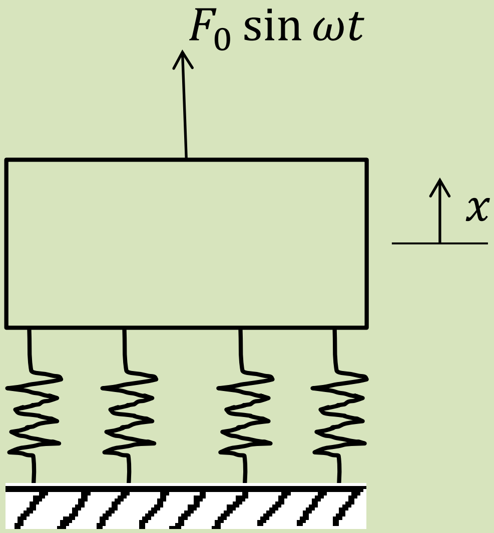


- تمرین : ثابت کنید فرکانس تشدید یک سیستم با میرایی برابر است با؛

- $\omega = \sqrt{1 - 2\zeta^2}\ \omega_n$
-

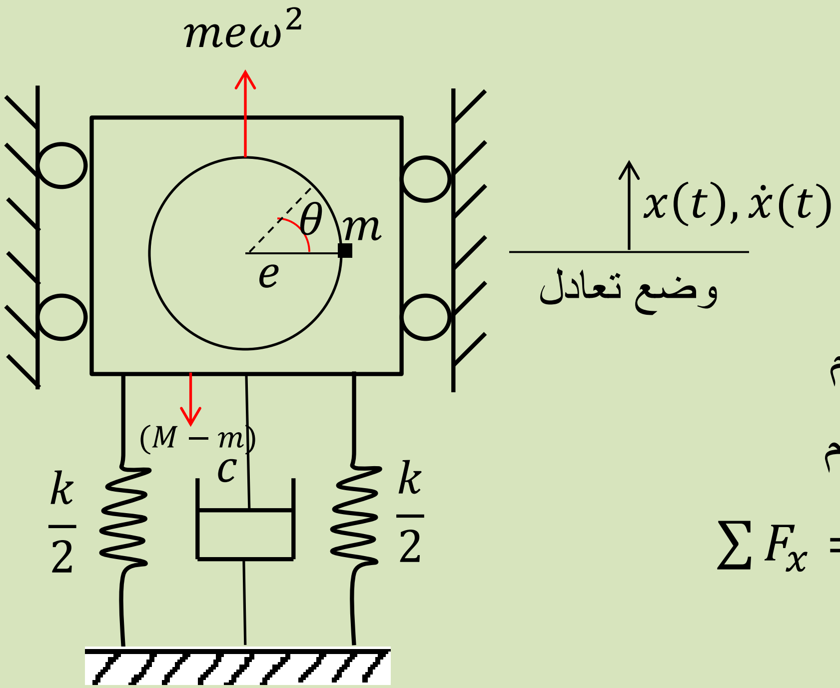


- مثال : یک ماشین به جرم45 کیلو گرم روی پایه هایی با چهار ستون به ضرایب سختی $2\times10^5\ {}^{N}/_{m}$ قرار گرفته است .در موقع سرویس ،فرکانس کاری ماشین برابر 32Hz اندازه گیری شده است. همچنین دامنه جابجایی ان x=1.5 mm میباشد اگر از ضریب دمپینگ صرفه نظر شود مقدار نیروی تحریک اعمالی وارد شده بر سیستم چند برابر وزن ان میباشد؟



- $x_{max} = 1.5mm \qquad k = 2\times10^5 ({}^{N}/_{m})$
- $\omega = 32Hz \qquad \frac{F_0}{mg} = ?$
- $X = \frac{F_0}{k}.\frac{1}{(1-r^2)} \qquad (\zeta = 0)$
- $\mathrm{r} = \frac{\omega}{\omega_n} \quad ; \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4(2\times10^5)}{45}} = 2\times66.66$
- $r = \frac{32\times2\pi}{66.66\times2} = \checkmark \qquad 1.5\times10^{-3} = \frac{F_0}{4\times2\times10^5}.\frac{1}{1-r^2} \qquad F_0 = \checkmark$

- نابالانسی ؛



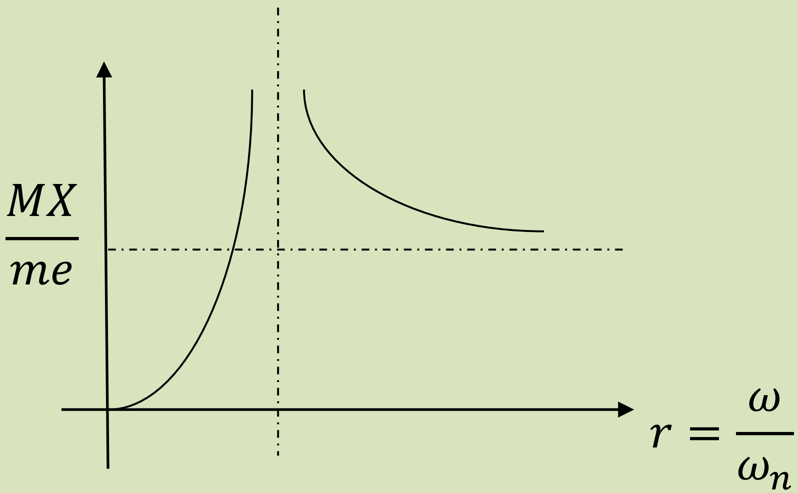
- جرم نا بالانسی : m
- جرم کل دستگاه : M

- برای جرم M ; $x = x$ دستگاه
- برای جرم m ; $x = x$ دستگاه $+ e\sin\omega t$
- $\sum F_x = \sum_{i=0}^{n} M_i \ddot{x}_i$

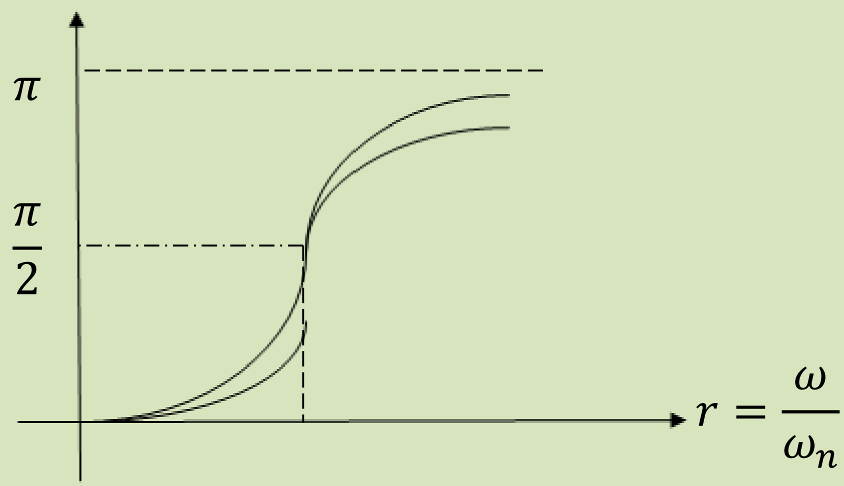
- $\Rightarrow \quad -kx - c\dot{x} = (M-m)\ddot{x} + m(\ddot{x} - e\omega^2 \sin\omega t)$
- $(M-m)\ddot{x} + m\ddot{x} + kx + c\dot{x} = me\omega^2 \sin\omega t$
- $\boxed{M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = me\omega^2 \sin\omega t}$

- $X = \frac{me\omega^2}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} = \ldots \quad (\frac{1}{{\omega_n}^2} = \frac{M}{k}) \quad = \frac{Mem\omega^2}{k\,M} \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$

- $X = \frac{mer^2}{M}\frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$ $\qquad \frac{MX}{me} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$



$$\varphi = \tan^{-1}\frac{2\zeta r}{1-r^2}$$



- مثال : نابالانسی چرخان یک ماشین دوار به جرم$65(kg)$ برابر با $0.15(kg.m)$ می باشد. ماشین در بسامد 125 هرتز کار می کند و بر روی بستری با سختی جایگزین $2\times10^6({}^{N}/_{m})$ و نسبت
- میرایی $\zeta = 0.12$ نصب شده است. پاسخ حالت پایدار و دامنه ماکزیمم آن چقدر می باشد؟

- $\mathrm{w_n} = \sqrt{\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}}} = \sqrt{\frac{2*10^6}{65}} = 175.14\ (\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}})$ $\qquad r = \frac{w}{w_n} = \frac{125*2\pi}{175.14} = 4.48$

- $\frac{MX}{me} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}} \longrightarrow \frac{65X}{0.15} = \frac{(4.48)^2}{\sqrt{[1-(4.48)^2]^2+(2*0.12*4.48)^2}} \Rightarrow X = 2.43$

- $\varphi = \tan^{-1}\frac{2\xi r}{1-r^2} = \tan^{-1}\frac{2*0.12*4.48}{1-4.48^2} = -3.23$

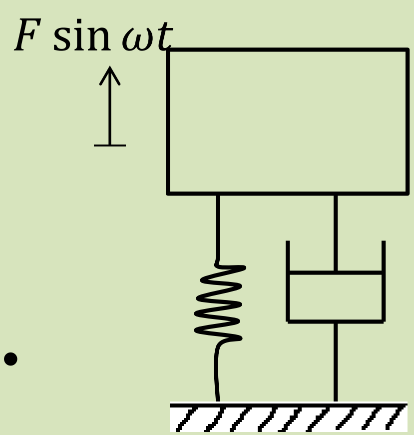
- $\Longrightarrow \quad x = 2.43\sin(wt + 3.23)$

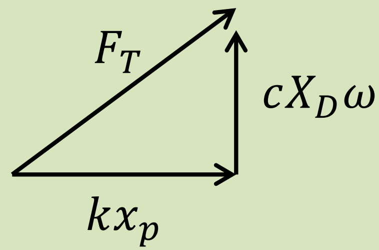
لنگش هم گام ؛

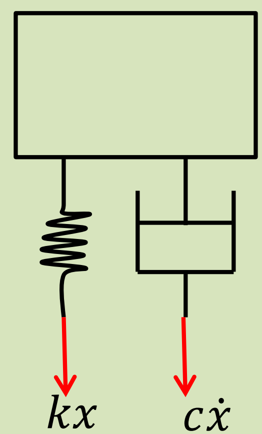
در لنگش هم گام همیشه سرعت $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ لنگش با سرعت چرخشی ω که ثابت فرض می شود مساوی است. بدین ترتیب داریم:

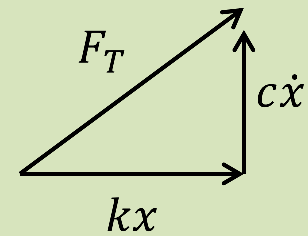
$\dot{\theta} = w$

- $x = X_D \sin \omega t$
- $kX = KX_D \sin \omega t$ $\qquad kX_D =$ امپدانس
- $c\dot{x} = cX_D\omega \cos \omega t = cX_D\omega \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ $\qquad cX_p\omega =$ امپدانس
- محاسبه نیروهای وارده به تکیه گاه :
-









- $x = X_D \sin \omega t$

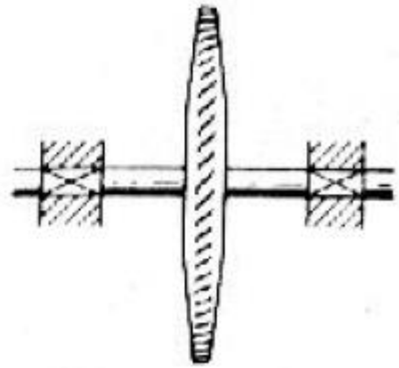
- $F_T = kX_D\sqrt{1+(\frac{cw}{k})^2}$ $\qquad X_D = \frac{F_0}{k} * \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}$

- $F_T = k\,\frac{F_0}{k} * \frac{\sqrt{1+\left(\frac{c\omega}{k}\right)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}$ $\Rightarrow$ $\frac{F_T}{F_0} = \frac{\sqrt{1+(\frac{c\omega}{k})^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}$

- $*\frac{c}{m} = 2\xi\omega_n \Rightarrow \frac{c\omega}{k} = \frac{2\xi\omega_n m\omega}{k} = \frac{2\xi\omega}{\omega_n} = 2\xi r$

- $\frac{F_T}{F_0} = \frac{\sqrt{1+(2\xi r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}$ $\longrightarrow$ $F_T = kX_D\sqrt{1+(2\xi r)^2}$

3-14 روتور توربینی به جرم 13.6 kg از میانه محور فولادی به طول 0.4064m، مانند شکل P3-14 سوار شده‌است. نامیزانی روتور 0.2879 kgcm است. نیروی وارد بر یاتاقانها را در 6000 rpm بیابید. اگر قطر محور فولادی 2.54 cm باشد، نتایج را با حالتی که همین روتور بر محوری به قطر 1.905 cm سوار است مقایسه کنید.(محور روی یاتاقان ساده است.)



$$k=\frac{48EI}{l}=2.922\times10^{6}\ \text{N/m} \qquad \& \qquad m=14.38\ \text{kg}$$

$$f_n=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2.922\times10^{6}}{14.38}}=71.74\ \text{Hz}=4304\ \text{rpm} \qquad \frac{\omega}{\omega_n}=\frac{6000}{4304}=1.394$$

$$r=\frac{e\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}=-2.06e \qquad me=0.2879\ \text{kg.cm}$$

$$e=\frac{0.2879}{13.6}=0.02117\ \text{cm} \rightarrow r=0.206(0.02117)=-0.04316\ \text{cm} \qquad F=m(r+e)\omega^2=1273\ \text{N}$$

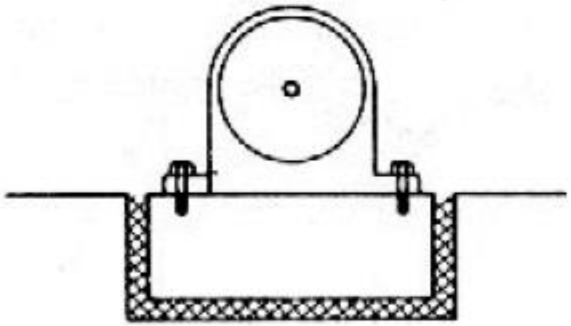
$$d=1.905\ \text{cm:}\quad 0.486m_{\text{محور}}=0.486\left(\frac{\pi}{4}\right)(0.01905^2\times0.4064)(7830)=0.7708$$

$m = m_{\text{دیسک}} + 0.483 m_{\text{محور}} = 14.04\ kg$

$I = 0.6464 \times 10^{-8} m^4$ & $k = 0.9441 \times 10^6$ $f_n = 41.27\ Hz = 2476\ rpm$

$\frac{\omega}{\omega_n} = \frac{6000}{2476} = 2.423 \rightarrow r = -0.02552$ $r + e = 0.00435 \rightarrow F = 241.1\ N$

3-24 یک موتور الکتریکی به جرم 68 kg بر قطعه‌ای به جرم 1200 kg و با فرکانس طبیعی کل 160 cpm و ضریب میرایی $\xi = 0.10$ سوار شده‌است.(شکل P3-24 را بنگرید.) اگر نامیزانی موتور، نیروی هماهنگ $F = 100 \sin 31.4t$ را پدید آورد، دامنه ارتعاش قطعه و نیروی انتقالی کف را به‌دست‌آورید.



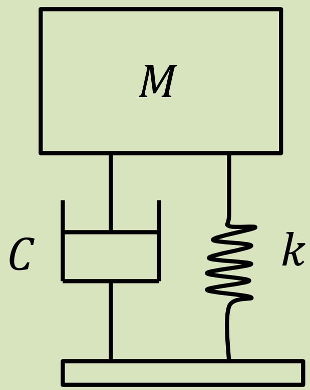
$M = 68 + 1200 = 1268 kg$ $f_n = 160 cpm$

$\omega_n = 2\pi \frac{160}{60} = 16.75 rad/s$ $\frac{\omega}{\omega_n} = \frac{31.4}{16.45} = 1.8746$

$k = \omega_n^2 M = 355951\ N/m$

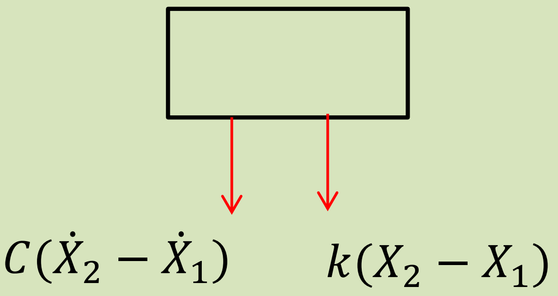
$X = 110.5 \times 10^{-6} m = 0.01105\ cm$ $F_{TR} = kX \sqrt{1 + (2\xi \frac{\omega}{\omega_n})^2} = 42\ N$

- بررسی سیستم تحت تحریک پایه ؛



$X_2 = X_{out}$ جابجایی سیستم

$X_1 = X_{in}$ جابجایی پایه



$$-k(X_2 - X_1) - c\left(\dot{X}_2 - \dot{X}_1\right) = M\ddot{X}_2 \qquad \boxed{M\ddot{X}_2 + C\dot{X}_2 + kX_2 = C\dot{X}_1 + kX_1}$$

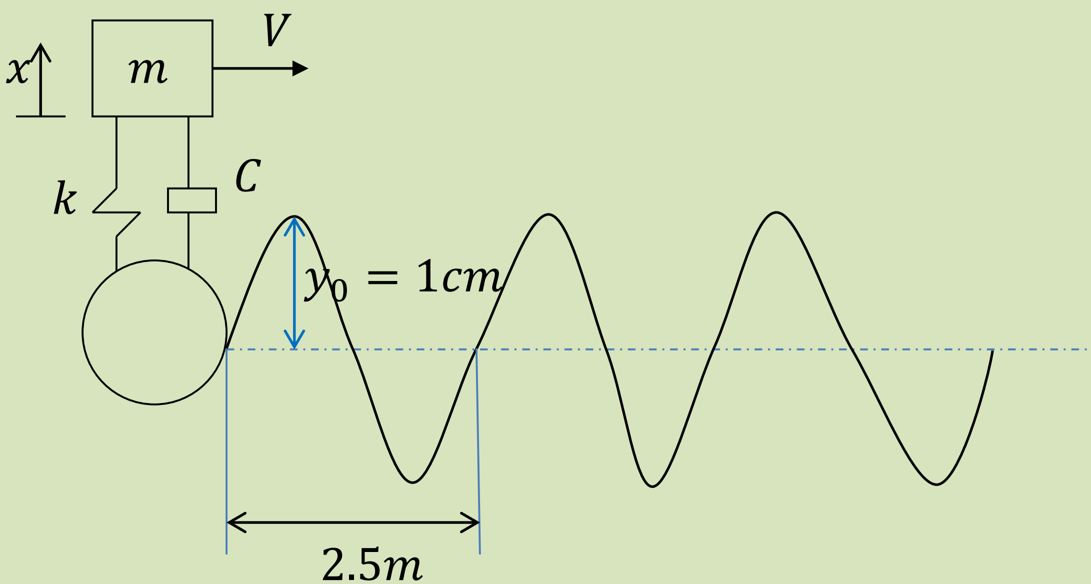
مثال : فرض کنید $x_1 = A\sin\omega t$ باشد.مقدار $\frac{x_2}{x_1}$ را با استفاده از آنچه در درس معادلات دیفرانسیل گفته شد،بدست آورید.

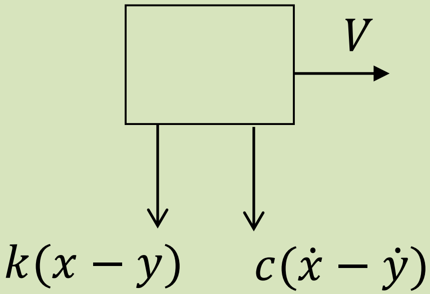
$if;\ \ x_1$: تحریک سینوسی باشد $\qquad x_1 = X_{in}\sin\omega t \qquad x_1 = Im(X_{in}e^{i\omega t})$

$x_2 = X_{out}e^{i\omega t} \longrightarrow$ یک عدد مختلط است که اختلاف فاز نیز در درون آن نهفته است

-
- $-MX_{out}\omega^2 \cancel{e^{i\omega t}} + kX_{out}\cancel{e^{i\omega t}} + CX_{out}i\omega \cancel{e^{i\omega t}} = kX_{in}\cancel{e^{i\omega t}} + Ci\omega X_{in}\cancel{e^{i\omega t}}$
- $X_{out}(k - M\omega^2 + Ci\omega) = X_{in}(k + Ci\omega)$
- $\frac{X_{out}}{X_{in}} = \frac{k+Ci\omega}{k-M\omega^2+Ci\omega}$ $\left|\frac{X_{out}}{X_{in}}\right| = \frac{\sqrt{k^2+C^2\omega^2}}{\sqrt{(k-M\omega^2)^2+c^2\omega^2}} \cdot \frac{e^{i\,\tan^{-1}(\frac{C\omega}{k})}}{e^{i\,\tan^{-1}(\frac{C\omega}{k-m\omega^2})}}$
- $= \frac{\sqrt{k^2+C^2\omega^2}}{\sqrt{(k-M\omega^2)^2+c^2\omega^2}} . e^{i\,[\tan^{-1}\left(\frac{C\omega}{k}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{C\omega}{k-m\omega^2}\right)]}$
- همان طور که دیده می شود نسبت $\frac{X_{out}}{X_{in}}$ همانند نسبت $\frac{F_T}{F_0}$ است.لذا با ساده سازی هایی که در آن
- قسمت انجام شد،می توان نوشت؛
- $\boxed{\left|\frac{X_{out}}{X_{in}}\right| = \frac{\sqrt{1+(2\zeta r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}}$ نسبت انتقال $\varphi = [\tan^{-1}\left(\frac{C\omega}{k}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{C\omega}{k-m\omega^2}\right)]$
- $\boxed{\varphi = [\,\tan^{-1}(2\zeta r) - \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta r}{1-r^2}\right)\,]}$ $\boxed{X_{out} = |X_{in}|\sin(\omega t - \varphi)}$

- مثال: مدل ساده شده ای از سیستم فنربندی یک خودرو در شکل نشان داده شده است. بدنه ی خودرو به جرم $500(kg)$ به وسیله ی سیستم فنر بندی به چرخ متصل شده است.سیستم فنربندی با فنری به سختی $4\times10^5(\frac{N}{m})$ و کمک فنری روغنی با ضریب میرایی $3000(\frac{Ns}{m})$ به صورت موازی
- با هم به خودرو متصل شده است. فرض می شود که چرخ های ماشین سر و ناهمواری سطح جاده به صورت سینوسی مدل شود. اگر سرعت خودرو $52(m/s)$ باشد،ماکزیمم دامنه جابجایی سیستم
- چقدر است؟





- $-k(x-y)-C(\dot{x}-\dot{y})=m\ddot{x}$
- $m\ddot{x}+C\dot{x}+kx=C\dot{y}+ky$

- $y(t) = y_0 \sin(\omega t) = y_0 \sin(\frac{2\pi V t}{l}) = 10^{-2} \sin(\frac{2\pi\times 52}{2.5} t) = 10^{-2} \sin(130.7t)$

- $\omega_{\text{تحریک}} = 130.7$ $\qquad\qquad$ $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4\times 10^5}{500}} = 28.3(^{rad}/_s)$

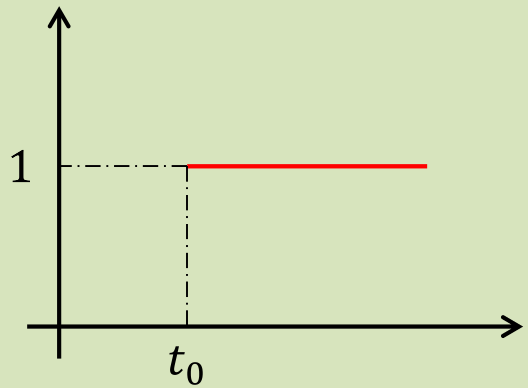
- $r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{130.7}{28.3} = 4.62$ $\qquad\qquad$ $\zeta = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{3000}{2\times 500\times 28.3} = 0.106$

- $\left|\frac{X_{out}}{X_{in}}\right| = \frac{\sqrt{1+(2\zeta r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}} = \frac{\sqrt{1+(2\times 0.106\times 4.62)^2}}{\sqrt{(1-4.62^2)^2+(2\times 0.106\times 4.62)^2}} = 6.87 \times 10^{-4}(m)$

- $\varphi = \tan^{-1}(2\zeta r) - \tan^{-1}(\frac{2\zeta r}{1-r^2}) = [\tan^{-1}(2 \times 0.106 \times 4.62) - \tan^{-1}(\frac{2\times 0.106\times 4.62}{1-4.62^2})$

مسائل فصل سوم؛ 4 – 8 – 13 – 15 – 18 – 20 – 28 – 36

- ارتعاشات گذرا؛
- ضربه :



تابع پله
$$u(t-t_0)=\begin{cases}1 & t>t_0\\ 0 & t<t_0\end{cases}$$

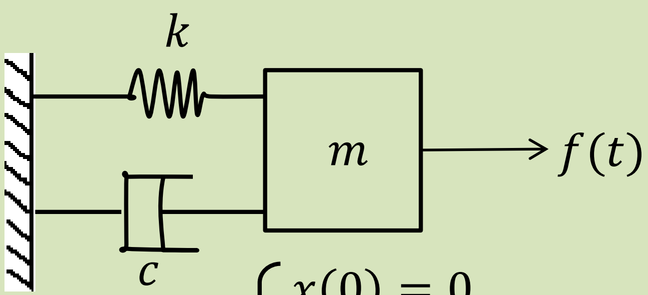
- $\frac{du(t-t_0)}{dt}=\delta(t-t_0)$ $\qquad \int_0^{\infty}\delta(t-t_0)=1$

$$\delta(t-t_0)=\begin{cases}0 & t>t_0+\Delta t_0 \longrightarrow \text{خیلی کوچک}\\ 0 & t<t_0-\Delta t_0 \longrightarrow \text{خیلی کوچک}\end{cases}$$

- $\forall t = t_0 \quad \int_0^{\infty} \delta\,(t - t_0) = 1$

- $\delta(t - t_0) = \int_0^{\infty} f\,(t)dt = 1$ نیرویی است که:

- فرض می کنیم نیروی ضربه به یک سیستم جرم و فنر اعمال شود؛

- 

$\Delta G = \int f dt$ تغییرات اندازه حرکت خطی

نیروی خارجی اعمالی به سیستم

- $\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$

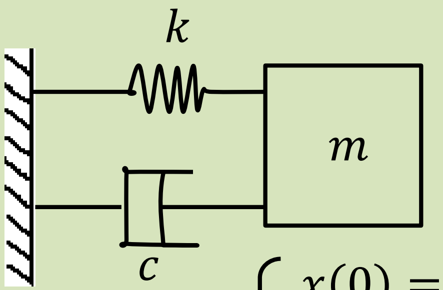
- $G = mv$

$$\Delta G = mv_1 - \cancel{mv_0} = \int f dt = 1 \qquad mv_1 = 1 \qquad \boxed{v_1 = \frac{1}{m}}$$

سرعت در لحظه بعد ضربه

سرعت در لحظه قبل ضربه

- به لحاظ فیزیکی ضربه یعنی نیرویی که اگر به یک سیستم جرم و فنر اعمال شود،سرعت در لحظه
- بعد از برخورد به $\frac{1}{m}$ برسد.
- بجای بررسی سیستم با نیروی $f(t)$ ،سیستم زیر را که بدون نیروی $f(t)$ ولی دارای شرایط اولیه
- معادل ضربه است بررسی می کنیم.



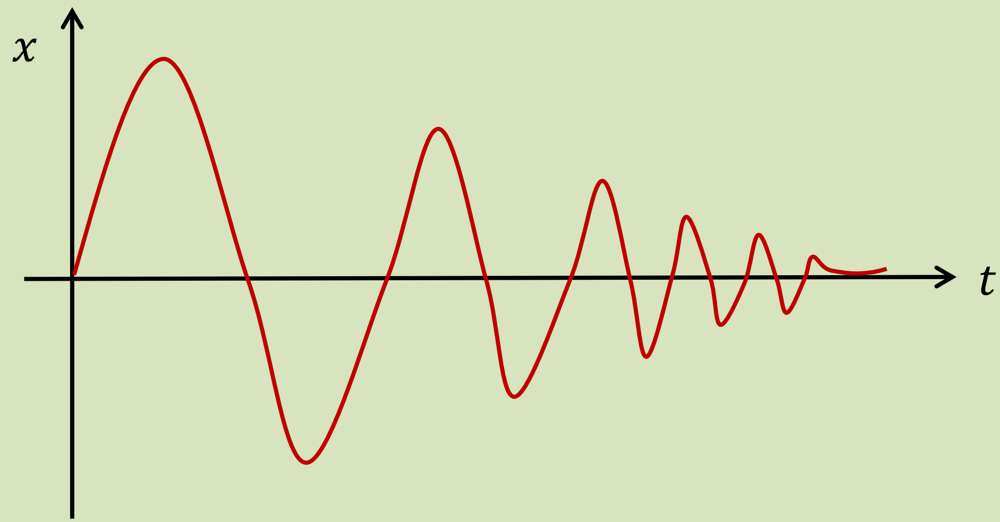
$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = \frac{1}{m} \end{cases}$$

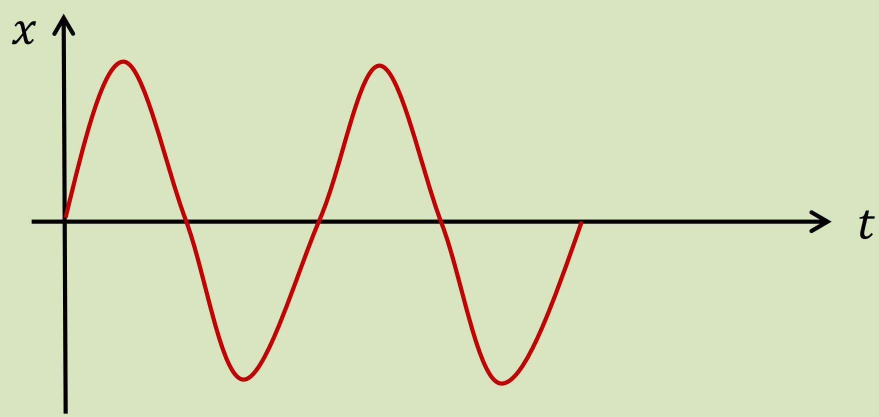
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \qquad \ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + {\omega_n}^2 x = 0$$

$$if \qquad \zeta < 1; \quad X(t) = C_1 e^{-\zeta\omega_n t}[\sin(\omega_d t + \psi)]$$

$$x(0) = 0 \;; \quad 0 = C_1 \sin\psi \qquad \sin\psi = 0 \qquad \psi = 0$$

- $x(0) = {}^1/_m$
- $\dot{x}(t) = C_1\zeta\omega_n e^{-\zeta\omega t}\sin(\omega_d t + \cancel{\psi}) + C_1\omega_d e^{-\zeta\omega t}\cos(\omega_d t + \cancel{\psi})$
- $\frac{1}{m} = -C_1\zeta\omega_n \cancel{\sin(0)} + C_1\omega_d\cos(0)$

-
- $\frac{1}{m} = C_1\omega_d$ $\boxed{C_1 = \frac{1}{m\omega_d}}$
- $\boxed{x(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t)}$ پاسخ به ضربه واحد
- 

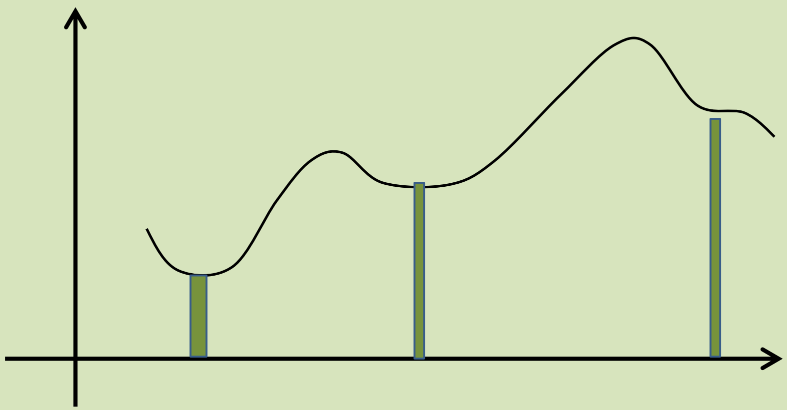
$0 \neq \zeta < 1$
- 

$\zeta = 0$

- اگر ضربه ای به اندازه J در $t=t_0$ اتفاق بیفتد، داریم؛

- $$x(t) = \frac{J}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n(t-t_0)} \sin[\omega_d(t - t_0)]$$

- اگر به جای ضربه نیرویی به شکل زیر به سیستم اعمال شود داریم؛



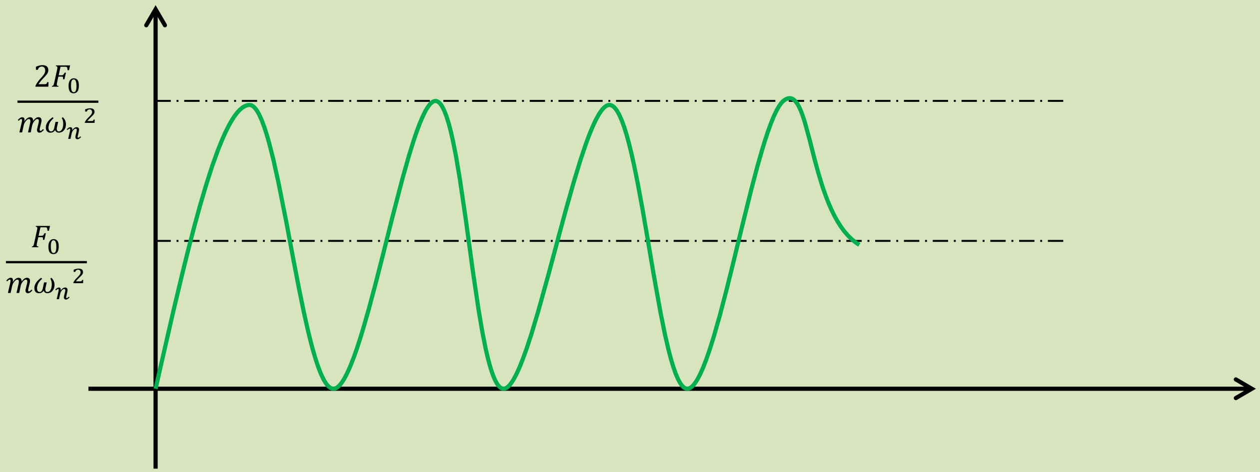
- پاسخ سیستم در هر زمانی مجموع تمام اثراتی است که قبل از آن وجود دارد.

- $$\boxed{x(t) = \int_0^t \underbrace{f(\tau)}\, h(t-\tau)d\tau}$$

اندازه ضربه

- مثال: اگر تحریک اعمالی به صورت پله باشد پاسخ سیستم را بیابید.

- $f(t) = F_0\, u(t)$
- $x(t) = \int_0^t F_0 \cancelto{1}{u(\tau)} h(t-\tau)\,d\tau$
- $= \int_0^t F_0 \cancelto{1}{u(\tau)} \frac{1}{m\omega_n} \sin[\omega_n(t-\tau)]\,d\tau$
- $= \frac{F_0}{m\omega_n} \frac{\cos[\omega_n(t-\tau)]}{\omega_n} \Big|_0^t = \frac{F_0}{m\omega_n} \left\{ \cancelto{1}{\frac{\cos[\omega_n(t-t)]}{\omega_n}} - \frac{\cos[\omega_n(t-0)]}{\omega_n} \right\} = \frac{F_0}{m{\omega_n}^2} [1-\cos(\omega_n t)]$



- به عنوان تمرین، مثال قبل را با میرایی حل کنید.

- اگر $t<t_0$ باشد، داریم:

- $$x(t) = \int_0^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_0^t F_0\ \frac{e^{\zeta\omega_n{}^{(t-\tau)}}}{m\omega_d}\sin[\omega_d(t-\tau)d\tau]$$

- $$\begin{cases} t-\tau = z \\ d\tau = -dz \end{cases} \qquad \text{if} \begin{cases} t=\tau \quad \rightarrow \quad z=0 \\ 0=\tau \quad \rightarrow \quad z=t \end{cases}$$

$$x(t) = \int_t^0 -\frac{F_0\ e^{-\zeta\omega_n z}\sin(\omega_d z)}{m\omega_d}\ dz$$

انتگرال جزء به جز $\int u dv = uv - \int v du$

$$u = -\frac{F_0 \sin(\omega_d z)}{m\omega_d} \quad , \qquad dv = e^{-\zeta\omega_n z}dz$$

- $I = \int_t^0 \frac{-F_0 e^{\left(-\zeta\omega_n z\right)} \sin(\omega_d z) dz}{m\omega_d} = \frac{-F_0 \sin(\omega_d z)}{m\omega_d} \cdot \frac{e^{-\zeta\omega_n z}}{(-\zeta\omega_n)} \Big|_t^0$

  $dv \qquad u$

  $- \int_t^0 \left(\frac{e^{\left(-\zeta\omega_n z\right)}}{-\zeta\omega_n} \, \frac{-F_0}{m} \cos\omega_d \, dz \right)$

- $= \frac{-F_0 \sin(\omega_d t)}{m\zeta\omega_d\omega_n} e^{-\zeta\omega_n t} - \int_t^0 \frac{F_0 e^{\left(-\zeta\omega_n z\right)} \cos(\omega_d)}{\zeta\omega_n m} dz$

- $= \frac{-F_0 \sin(\omega_d t)}{m\zeta\omega_d\omega_n} e^{-\zeta\omega_n t} + \frac{F_0 \cos(\omega_d z) e^{\left(-\zeta\omega_n z\right)}}{(\zeta\omega_n)^2 m} - \int_t^0 \frac{F_0 \sin(\omega_d z)}{\zeta^2 {\omega_n}^2 m} e^{\left(-\zeta\omega_n z\right)} dz$

- $= \frac{-F_0 \sin(\omega_d t) e^{-\zeta\omega t}}{m\zeta\omega_d\omega_n} + \left[\frac{F_0}{m\zeta^2{\omega_n}^2} - \frac{F_0 \cos(\omega_d t) e^{(-\zeta\omega t)}}{(\zeta\omega_n)^2 m} \right] + \frac{1}{\zeta^2} I$

- $\left(1 - \frac{1}{\zeta^2}\right) I = A \qquad u \qquad I = \frac{A}{1 - \frac{1}{\zeta^2}} \qquad dv$

- اگر t>0 ؛ آنگاه داریم

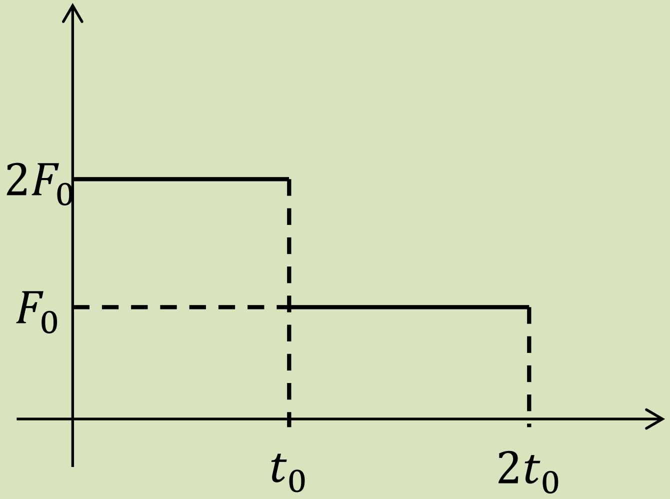
  $x(t) = \int_0^{t_0} f(\tau) h(t-\tau) d\tau + \int_{t_0}^{t} f(\tau) h(t-\tau) d\tau$

-
- $\begin{cases} t-\tau = z \\ \\ d\tau = -dz \end{cases}$ $\quad = \int_{t_0}^{0} \frac{-F_0 e^{\left(-\zeta\omega_n z\right)}}{m\omega_d} \sin(\omega_d z)\, dz$

- $= [\frac{-F_0 e^{\left(-\zeta\omega_n z\right)}}{m\omega_d} \frac{\cos(\omega_d z)}{\omega_d}]_{t_0}^{0} + \int_{t_0}^{0} \frac{\zeta\omega_n F_0 e^{\left(-\zeta\omega_n z\right)}}{m\omega_d} \frac{\cos(\omega_d z)}{\omega_d}$

- که در اینجا یک بار دیگر انتگرال گیری می کنیم تا خودش را تکرار کند ودر نهایت انتگرال محاسبه می شود.

- مثال: پاسخ سیستم را به تحریک داده شده بیابید. (ξ =0)



- $h(t) = \frac{e^{(-\zeta\omega_n t)} \sin(\omega_d t)}{m\omega_d} \xrightarrow{\zeta = 0} h(t) = \frac{\sin(\omega_d t)}{m\omega_d} \quad (w_d = w_n)$ روش اول
؛
- $0 < t < t_0 \qquad \int_0^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_0^t 2F_0 \, \frac{Sin\, w_n(t-\tau)d\tau}{mw_n}$
- $t_0 < t < 2t_0 \qquad \int_0^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_0^{t_0} 2F_0 \, \frac{Sin\, w_n(t-\tau)d\tau}{mw_n} + \int_{t_0}^t F_0 \frac{Sin(w_n(t-\tau)}{mw_n} d\tau$
- $t > 2t_0 \qquad \int_0^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_0^{t_0} 2F_0 \, \frac{Sin\, w_d(t-\tau)d\tau}{mw_d} + \int_{t0}^{2t_0} F_0 \, \frac{Sin\, w_n(t-\tau)d\tau}{mw_n}$
- روش دوم؛
- $f(t) = 2F_0[\, u(t) - u(t-t_0)] + F_0\, [u(t-t_0) - u(t-2t_0)]$
- $x(t) = \int_0^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau$
- $f(t) = 2F_0\, u(t) - F_0\, u(t-t_0) - F_0\, u(t-2t_0)$
- $x(t) = \int_0^t [\, 2F_0\, u(\tau) - F_0\, u(\tau-t_0) - F_0\, u(\tau-2t_0) \sin[\, \omega_n\, (t-\tau)]d\tau$

-

- قاعده کلی ؛ $\int_0^t u(\tau-t_0)g(t-\tau)d\tau = u(\tau-t_0)\int_{t_0}^t g(t-\tau)d\tau$

- $x(t) = 2F_0u(t)\int_0^t \frac{Sin\, w_n(t-\tau)d\tau}{mw_n} - F_0u(t-t_0)\int_{t_0}^t \frac{Sin\, w_n(t-\tau)d\tau}{mw_n}$

- $-F_0u(t-2t_0)\int_{2t_0}^t \frac{Sin\, w_n(t-\tau)d\tau}{mw_n}$

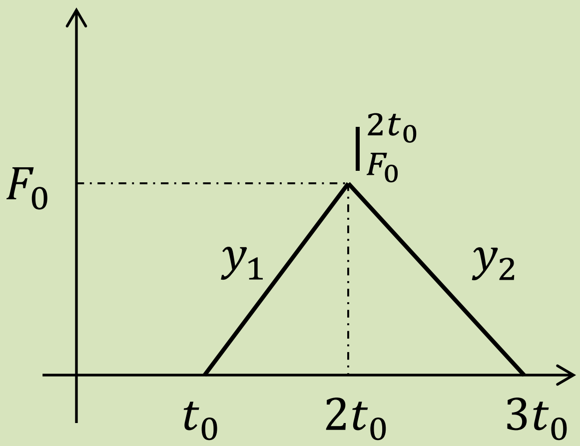
- $* \int \frac{Sin\, w_n(t-\tau)d\tau}{mw_n} = \frac{Cos\, w_n(t-\tau)}{mw_n^2}$

- $\Longrightarrow x(t) = 2F_0u(t)\frac{Cos\, w_n(t-\tau)}{mw_n^2}\Big|_0^t - F_0u(t-t_0)\frac{Cos\, w_n(t-\tau)}{mw_n^2}\Big|_{t_0}^t$

- $-F_0u(t-2t_0)\frac{Cos\, w_n(t-\tau)}{mw_n^2}\Big|_{2t_0}^t$

- $x(t) = 2F_0u(t)\left(\frac{1-Cos\,(w_nt)}{mw_n^2}\right) - F_0u(t-t_0)\left(\frac{1-Cos\, w_n(t-t_0)}{mw_n^2}\right) - F_0u(t-2t_0)\left(\frac{1-Cos\, w_n(t-2t_0)}{mw_n^2}\right)$

- مثال: پاسخ سیستم را به تحریک داده شده بیابید.$(\zeta = 0)$



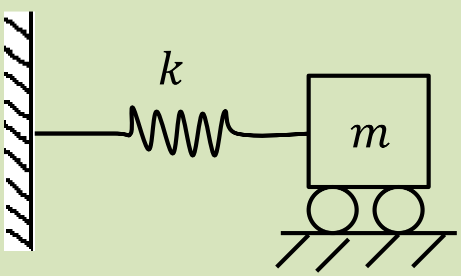
$$\begin{cases} y_1 = \frac{F_0}{t_0}(t - t_0) = f_1(t) \\ y_2 = \frac{-F_0}{t_0}(t - 3t_0) = f_2(t) \end{cases}$$

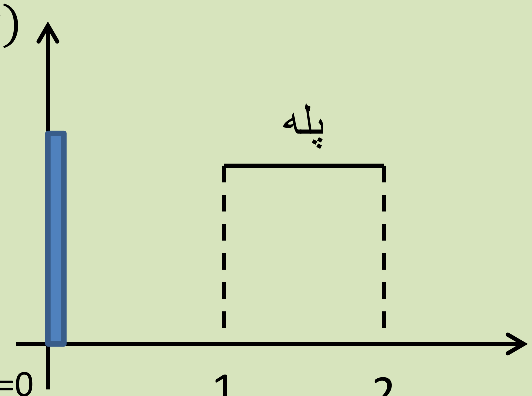
$$f(t) = [u(\tau - t_0) - u(\tau - 2t_0)\,]\frac{F_0}{t_0}(t - t_0) + [u(\tau - 2t_0) - u(\tau - t_0)]\ \frac{-F_0}{t_0}(t - 3t_0)]$$

مانند مثال قبل انتگرال گیری می کنیم .

- روش تبدیل لاپلاس
  - برای معادلات با شرایط اولیه قابل بررسی است.
  - وقتی معادله حل می شود حلی که بدست می آید مجموع حل همگن و و خصوصی است.
  - هم چنین شرایط اولیه را نیز جایگذاری می کنیم

- مثال: پاسخ سیستم را به تحریک داده شده با استفاده از روش تبدیل لاپلاس بیابید.





$$f(t) = \delta(t - t_0) + [u(t-1) - u(t-2)]$$

-
- $m\ddot{x} + kx = f(t)$
- $m\ddot{x} + kx = \delta(t - t_0) + u(t-1) - u(t-2)$
- $L\{m\ddot{x} + kx\} = L\{\delta(t - t_0) + u(t-1) - u(t-2)\}$
- * $L\{\delta(t - c)\} = e^{-cs}$

$$L\{u(t - t_0)\} = \frac{e^{-st_0}}{s}$$

$$L\{\ddot{x}\} = s^2X(s) - sX(0) - \dot{X}(0)$$

$$m\left[s^2X(s) - sX(0) - \dot{X}(0)\right] + kX(s) = 1 + \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s}$$

$$X(s) = \frac{1 + \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s} + msX(0) + m\dot{X}(0)}{ms^2 + k}$$

با فرض $X(0) = \dot{X}(0) = 0$ داریم ؛

-

- $X(s) = \frac{1+\frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s}}{ms^2+k} = \frac{1}{ms^2+k} + \frac{e^{-s}}{s(ms^2+k)} - \frac{e^{-2s}}{s(ms^2+k)}$

- $\longrightarrow \quad X(s) = \frac{1}{m} \left[\frac{1}{s^2+\omega_n{}^2} + \frac{e^{-s}}{s(s^2+\omega_n{}^2)} - \frac{e^{-2s}}{s^2+\omega_n{}^2}\right]$

- $x(t) = L^{-1}\{X(s)\}$

- $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+\omega_n{}^2}\right\} = \frac{1}{\omega_n} \sin(\omega_n t)$

- $L^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s(s^2+\omega_n{}^2)}\right\} = L^{-1}\{\frac{e^{-s}}{s} . \frac{1}{s^2+\omega_n{}^2}\}$

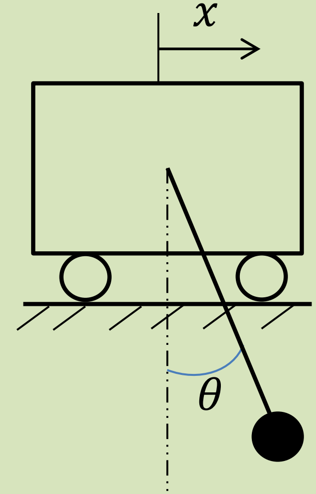
- $* \, L^{-1}\{F(s).G(s)\} = \int_0^t f(t-\lambda)g(\lambda)d\lambda$

- $F(s) \longrightarrow L\{f(t)\}$ & $G(s) \longrightarrow L\{g(t)\}$

-
- $F(s) = \frac{e^{-s}}{s}$; $f(t) = u(t-1)$
- $G(s) = \frac{1}{s^2+{\omega_n}^2}$; $g(t) = \frac{1}{\omega_n}\sin(\omega_n t)$
- $L^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s(s^2+{\omega_n}^2)}\right\} = \int_0^t u(t-1-\lambda)\frac{1}{\omega_n}\sin\omega_n\lambda\,.\,d\lambda$
- يا ; $f(t) = \frac{1}{\omega_n}\sin(\omega_n t)$, $G(t) = u(t-1)$
- $\Longrightarrow$ $L^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s(s^2+{\omega_n}^2)}\right\} = \int_0^t \frac{1}{\omega_n}\sin[\omega_n(t-\lambda)]\ u(\lambda-1)d\lambda$
- $= u(t-1)\int_1^t \frac{1}{\omega_n}\sin[\omega_n(t-\lambda)]\,d\lambda = \frac{-u(t-1)}{{\omega_n}^2}\cos[\omega_n(t-\lambda)]\,\Big|_1^t$
- $= \frac{u(t-1)}{{\omega_n}^2}\,[\,1-\cos[\omega_n\,(t-1)]$

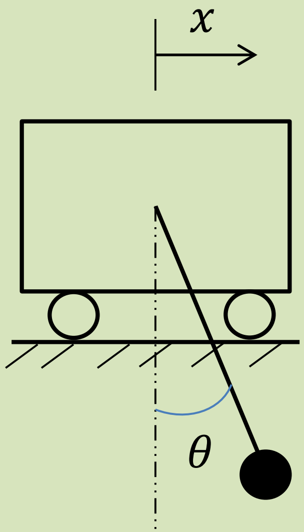
-
- به همین فرم تبدیل لاپلاس $\frac{e^{-2S}}{S(S^2+\omega_n^2)}$ را حساب می کنیم که برابر است با :
-
- $L^{-1}\left\{\frac{e^{-2S}}{S\left(S^2+\omega_n^2\right)}\right\}=\frac{u(t-2)}{{\omega_n}^2}\ [\,1-\cos[\omega_n(t-2)]]$

- سیستم های دو درجه آزادی ؛
-
- سیستمی است که برای معرفی آن به دو مشخصه نیاز است. به عبارت دیگر به دو معادله دیفرانسیل نیاز است تا بتوان مجهولات سیستم را بدست آورد.
- $x = X_0 \sin(\omega t)$



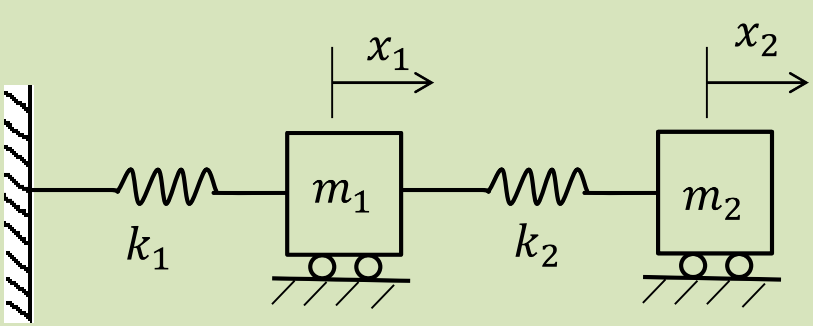
یک درجه آزادی

مجهول؛ θ

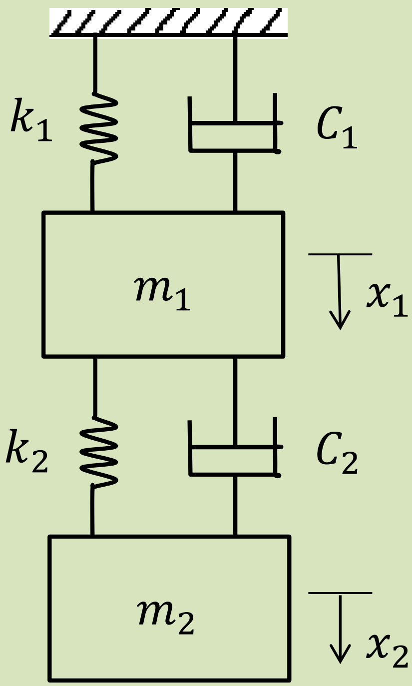


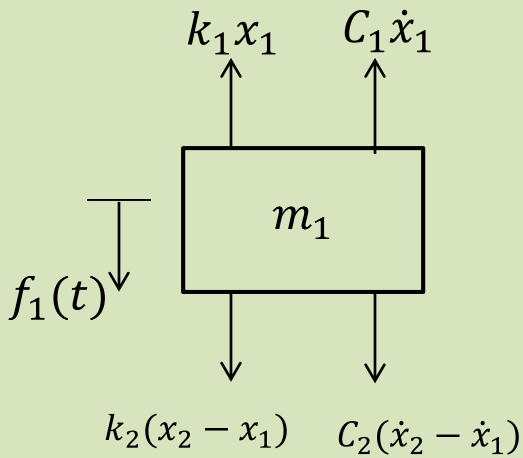
دو درجه آزادی

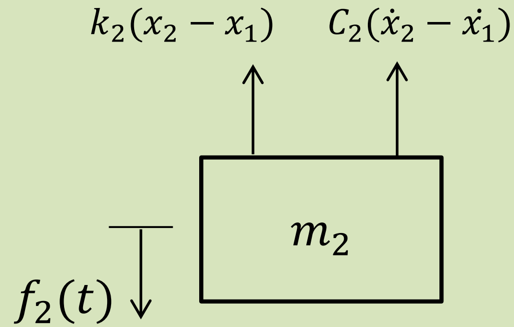
مجهول ؛ θ , x



- بدست آوردن معادله حرکت سیستم های دو درجه آزادی ؛







$$\begin{cases} \sum F_x = m_1 \ddot{x}_1 \\ \sum F_x = m_2 \ddot{x}_2 \end{cases}$$

-
- $$\begin{cases} -k_1x_1 - c_1\dot{x}_1 + k_2(x_2 - x_1) + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = m_1\ddot{x}_1 \\ -k_2(x_2 - x_1) - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = m_2\ddot{x}_2 \end{cases}$$
- $$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k_2 + k_1)x_1 - k_2x_2 + (c_2 + c_1)\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 - k_2x_1 + k_2x_2 - c_2\dot{x}_1 + c_2\dot{x}_2 = 0 \end{cases}$$
- $$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$$
-

ماتریس جرم　　　ماتریس سختی　　　ماتریس میرایی　　　ماتریس نیرو

-
- $$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$$

-

- $[\mathrm{M}]\begin{bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\end{bmatrix}+[\mathrm{k}]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+[c]\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_1(t)\\ f_2(t)\end{bmatrix}$

- معادله بالا نشان می‌دهد که یک سیستم دو درجه آزادی دارای معادلاتی به فرم زیر است؛

- $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}e & f\\ g & h\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}i & j\\ k & l\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_1(t)\\ f_2(t)\end{bmatrix}$

- سیستم از لحاظ دینامیکی $decouple$ می شود $\quad if \quad b=c=0$

- سیستم از لحاظ استاتیکی $decouple$ می شود $\quad if \quad f=g=0$

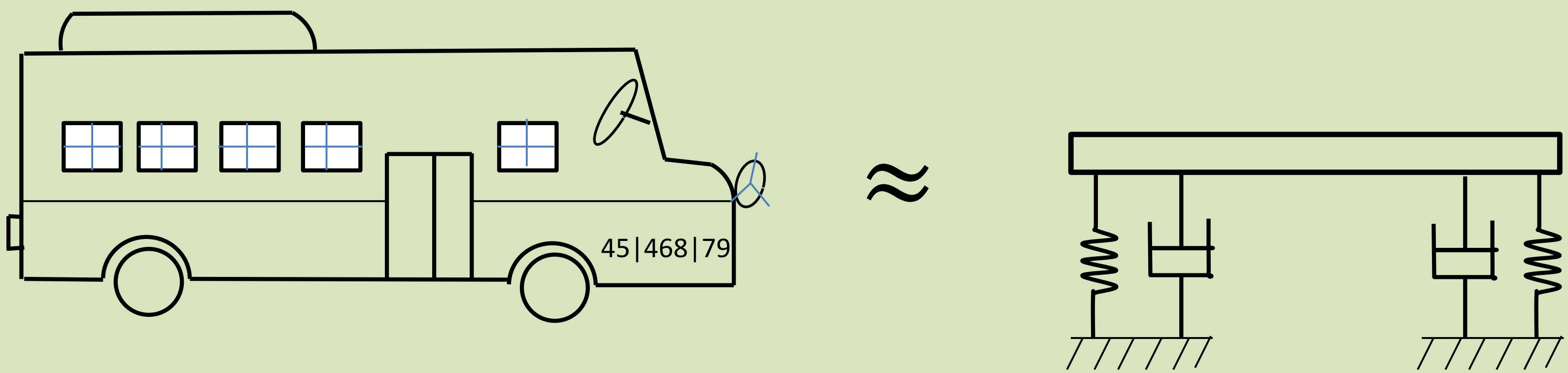
- سیستم $couple$ استاتیکی دارد. $\quad if \quad f\,\&\,g\neq 0$

- اگر فرض کنیم میرایی نداریم و هم چنین $g,f=0 \quad \& \quad b,c=0$ آنگاه داریم؛

- $\begin{cases} a\ddot{x}_1+ex_1=f_1(t)\\ d\ddot{x}_2+hx_2=f_2(t)\end{cases}$

- همان‌طور که می‌بینیم معادلات سیستم با هم کوپل نیستند. به دستگاهی که معادلات حرکت سیستم در آن به صورت بالا شود دستگاه اصلی می گوییم.

- به عنوان مثال فرض کنیم که شکل داده شده یک اتوبوس باشد که روی چرخ‌هایش قرار گرفته؛



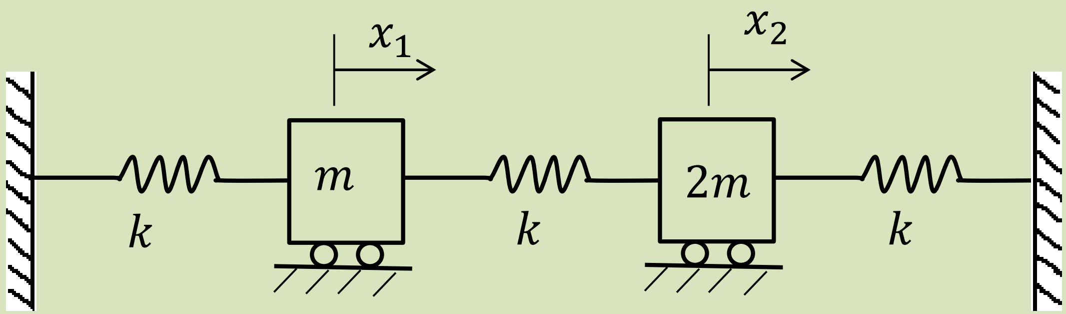
- این سیستم را میتوانیم بر حسب(x مرکز جرم، θ چرخش) ، (x انتها یا ابتدا، θ چرخش)

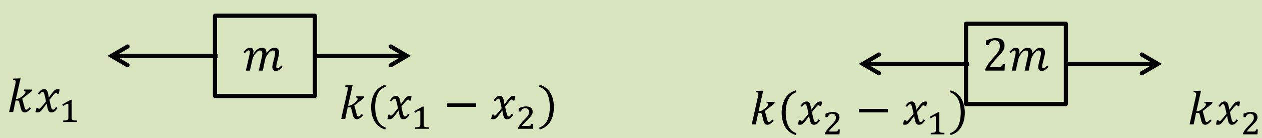
- $(\frac{3}{4}x,\frac{1}{4}x)$ معرفی کنیم.سپس بی نهایت حالت می توان پیدا کرد که سیستم را با آن

- معرفی کرد. حالتی میتواند وجود داشته باشد که باعث عدم جفت شدگی ،کوپل دینامیکی و استاتیکی شود که این دستگاه را دستگاه اصلی گویند.

- تمرین: رابطه l_1, l_2, k_1, k_2 را طوری بیابید که سیستم از لحاظ دینامیکی و استاتیکی
- کوپل نباشد.

- مثال: فرکانس‌های طبیعی و معادلات حرکت سیستم زیر را استخراج کنید.





- $$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -kx_1 - k(x_1 - x_2) \\ 2m\ddot{x}_2 = -\mathrm{k}(x_2 - x_1) - kx_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0 \\ 2m\ddot{x}_2 + 2kx_2 - kx_1 = 0 \end{cases}$$

- $$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

-
- چون در سیستم میراکننده وجود ندارد بنابراین انتظار ما از فیزیک مسئله این است که رفتار سیستم به صورت هارمونیک باشد.

- $x_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \psi_1) \equiv Im[A_1 e^{i(\omega t+\psi_1)}]$
- $x_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \psi_2) \equiv Im[A_2 e^{i(\omega t+\psi_2)}]$
- $\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -A_1\omega^2 e^{i(\omega t+\psi_1)} \\ -A_2\omega^2 e^{i(\omega t+\psi_2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 e^{i(\omega t+\psi_1)} \\ A_2 e^{i(\omega t+\psi_2)} \end{bmatrix} = [0]$
- $* \; A_1 e^{i(\omega t+\psi_1)} = A_1 e^{i(\omega t)}$

یک عددمختلط

- $\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -A_1\omega^2 e^{i\omega t} \\ -A_2\omega^2 e^{i\omega t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 e^{i\omega t} \\ A_2 e^{i\omega t} \end{bmatrix} = [0]$

- $$\begin{bmatrix} -m\omega^2 & 0 \\ 0 & -2m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = [0]$$
- $$\begin{bmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & 2k - 2m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = [0]$$
- $$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$
- if $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = 0 \xrightarrow{\text{شرط وجود جواب}} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 0$
- if $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \neq 0 \xrightarrow{\text{شرط وجود جواب}} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} \neq 0$
- $\begin{vmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & 2k - 2m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2k - m\omega^2)(2k - 2m\omega^2) - k^2 = 0$
- $\omega^2 = \lambda \qquad (2k - m\lambda)(2k - 2m\lambda) - k^2 = 0$

- $4k^2 - 6mk\lambda + 2m^2\lambda^2 - k^2 = 0$
- $\lambda^2 - \frac{3k}{m}\,\lambda + \frac{3k^2}{2m^2} = 0$
- $\lambda_1 = 0.634\,\frac{k}{m}$
- $\lambda = \frac{3k}{m} \pm \sqrt{(\frac{3k}{m})^2 - 4(\frac{3k^2}{2m^2})}$
- $\lambda_2 = 0.366\,\frac{k}{m}$
- $\omega_1 = \sqrt{\lambda_1}$, $\omega_2 = \sqrt{\lambda_2}$
- قانون کلی : این حل نشان داد که فرکانس های طبیعی را همیشه می توان از مساوی صفرقرار
- دادن دترمینان زیر بدست آورد؛
- $|[k] \quad \omega^2[M]| = 0$

- $$\begin{bmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & 2k - 2m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = [0]$$

- $\begin{cases} (2k - m\omega^2)A_1 - kA_2 = 0 & \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{k}{2k - m\omega^2} \quad (1) \\ -kA_1 + (2k - 2m\omega^2)A_2 = 0 & \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{2k - 2m\omega^2}{k} \quad (2) \end{cases}$

- فرض می کنیم $A_2 = A_0$ و $\omega = \omega_1$.آن گاه A_1 را از یکی از معادلات(1) یا(2) بدست می آوریم.

- چون دترمینان ضرایب صفر ،است نسبت $\frac{A_1}{A_2}$ در هر معادله یکسان است.

- $\begin{bmatrix} A_1 = 0.737A_0 \\ A_2 = A_0 \end{bmatrix}$ شکل مداولیه سیستم

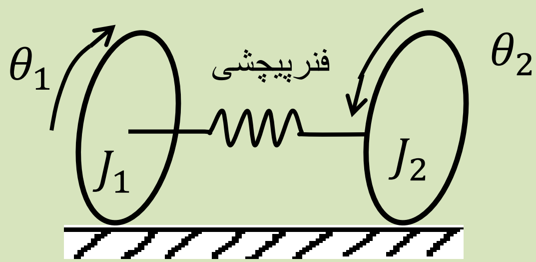
- اگر فرض کنیم $A_0 = 1$ ،گوییم سیستم به عدد یک نرمال شده است.

- این بار اگر $A_2 = A_0$ و $\omega = \omega_2$ آن گاه A_1 را بدست می آوریم :

- $\begin{bmatrix} \mathrm{A}_1 = -2.73\mathrm{A}_0 \\ \mathrm{A}_2 = A_0 \end{bmatrix}$
- وقتی سیستم در حالت ارتعاشات آزاد تحریک می شود، پاسخ سیستم ترکیبی ازهارمونیک های مد اول
- ومد دوم خواهد بود.
- $x_1 = A_{11}\sin(\omega_1 t + \psi_1) + A_{12}\sin(\omega_2 t + \psi_2)$
- $x_2 = A_{21}\sin(\omega_1 t + \psi_1) + A_{22}\sin(\omega_2 t + \psi_2)$
- معلومات مسئله ؛
- $\begin{cases} X_1(0) \qquad X_2(0) \\ \dot{X}_1(0) \qquad \dot{X}_2(0) \end{cases}$
- مجهولات مسئله؛
- $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \psi_1 & \psi_2 \\ & A_{21} & A_{22} & \end{bmatrix}$ $\quad \frac{A_{11}}{A_{21}} = \frac{A_1}{A_2} \longleftrightarrow (\omega_1) \qquad \frac{A_{12}}{A_{22}} = \frac{A_1}{A_2} \longleftrightarrow (\omega_2)$

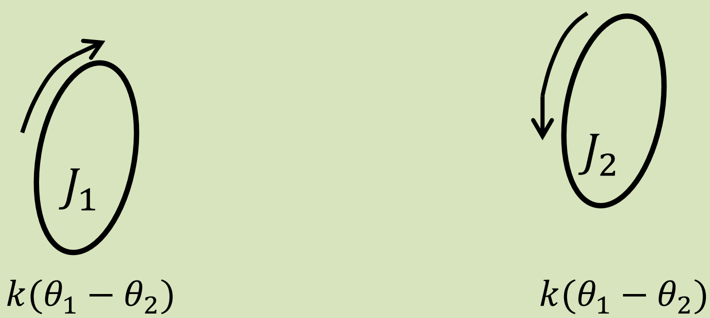
- مسائل فصل چهارم: 13و 18و 43
- از فصل دوم مسائل 32و 41 و 44و 52و 55و 24و 11 حتماً مطالعه شود.
- مسائل فصل پنجم : مثال های حل شده فصل (1-1-5 و 3-1-5و 1-2-5و 1-3-5 و 2-3-5و 1-4-5و
- 2-4-5) 1و5و4و8و20و24و29و57و55

- مثال: فرکانس های طبیعی سیستم زیر را استخراج کنید .



$$\sum M_o = j\alpha$$

$$\begin{cases} -k(\theta_1 - \theta_2) = j_1\ddot{\theta}_1 \\ k(\theta_1 - \theta_2) = j_2\ddot{\theta}_2 \end{cases}$$



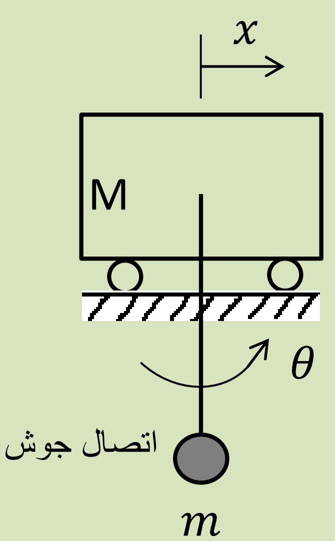
$$\begin{cases} j_1\ddot{\theta}_1 + k\theta_1 - k\theta_2 = 0 \\ j_2\ddot{\theta}_2 - k\theta_1 + k\theta_2 = 0 \end{cases}$$

- $$\overbrace{\begin{bmatrix} j_1 & 0 \\ 0 & j_2 \end{bmatrix}}^{[M]} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}}^{[k]} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = [0]$$

-
- $\left| [k]-[M]\omega^2 \right| = 0$
- $\begin{vmatrix} k - j_1\omega^2 & -k \\ -k & k - j_2\omega^2 \end{vmatrix} = 0$ $\quad (k - j_1\omega^2)(k - j_2\omega^2) - k^2 = 0$
- $\omega^2 = \lambda \quad (k - j_1\lambda)(k - j_2\lambda) - k^2 = 0$
- $k^2 - (j_1 + j_2)k\lambda + j_1 j_2 \lambda^2 - k^2 = 0$
- $-(j_1 + j_2)k\lambda + j_1 j_2 \lambda^2 = 0 \quad \lambda[-(j_1 + j_2)k + j_1 j_2 \lambda] = 0$
- $\lambda = 0 \quad , \quad \lambda = \frac{(j_1+j_2)k}{j_1 j_2}$
- if $\lambda = 0 \quad ; \quad \omega = 0$
- if $\lambda = \frac{(j_1+j_2)k}{j_1 j_2} \quad ; \quad \omega = \sqrt{\frac{(j_1+j_2)k}{j_1 j_2}}$

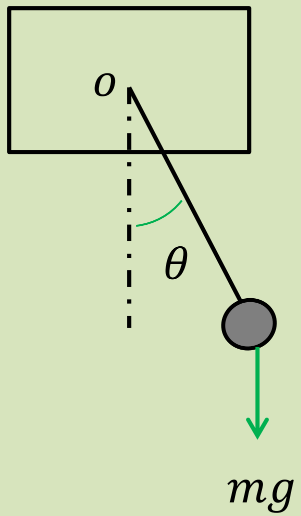
- همان طور مسئله نشان میدهد ،یکی از فرکانس ها صفر میباشد.این وضعیت زمانی رخ میدهد که سیستم دارای حرکت صلب باشد.به عبارت دیگر اگر فرض کنیم که به جای فنر یک میله صلب وجود دارد سیستم بتواند شتاب انتقالی بگیرد و حرکت کند یا اینکه سیستم را بتوان بدون اینکه هیچ تغییر وضعیتی در آن ایجاد شده باشد ،از محل خودش به محل دیگری جا به جا کرد.

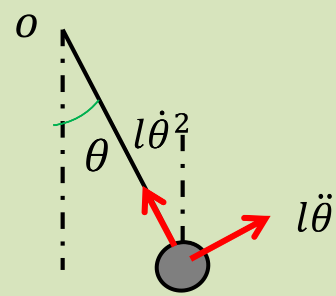
- مثال : معادلات حرکت سیستم زیر را بنویسید.
- یکی از فرکانس ها صفر است چون می تواند حرکت صلب داشته باشد.



- $* \quad \underbrace{\sum F_x}_{\text{نیروهای خارجی وارد بر سیستم}} = \sum M_i \ddot{X}_{ix}$

- $** \quad \sum M_o = I_o \alpha + m a_o d \cos\theta$





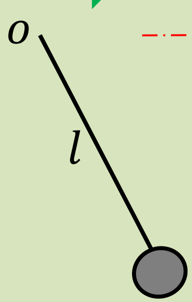
$$a_m = a_o + a_{m/o}$$

$$a_m = \ddot{x}\ \hat{\imath} + l\ddot{\theta}\cos\theta\ \ \hat{\imath} + l\ddot{\theta}\sin\theta\ \ \hat{\jmath} + l\dot{\theta}^2\cos\theta\ \ \hat{\jmath} - l\dot{\theta}^2 sin\theta\ \hat{\imath}$$

$$a_m = \left(\ddot{x} + l\ddot{\theta}\cos\theta - l\dot{\theta}^2 sin\theta\right)\hat{\imath} + (l\ddot{\theta}\sin\theta + l\dot{\theta}^2\cos\theta)\hat{\jmath}$$

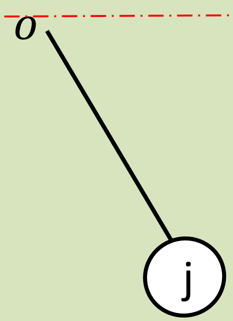
$\overset{*}{\Rightarrow}$ $0 = M\ddot{x} + m(\ddot{x} + l\ddot{\theta})$ معادله حرکت اول

$\overset{**}{\Rightarrow}$ $-mglsin(\theta) = I_o\ddot{\theta} + m\ddot{x}l \rightarrow \ddot{x} + l\ddot{\theta} + g\theta = 0$ معادله حرکت دوم



$$j_o = \cancel{I_G} + ml^2 = ml^2$$

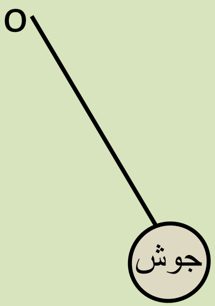
ممان حول خودش صفراست



قضیه انتقال : $I_o = I_G + md^2$

$$I_o = I_G + m(l+r)^2$$

$$I_o = \frac{1}{2}mr^2 + m(l+r)^2$$

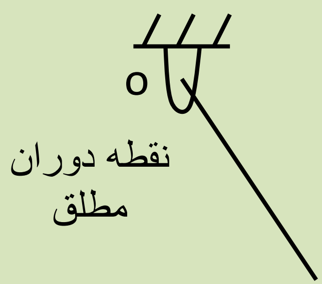


- $\sum M_G = I\alpha \longrightarrow$ 0=0
- $\sum M_O = I_G\alpha + m\bar{a}d$
- $-mglsin(\theta) = \cancel{I_o}\alpha + m\bar{a}d$

- یادآوری از دینامیک :

- $\sum M_G = I_G\alpha$ قانون کلی
- $\sum M_o = I_G\alpha + m\bar{a}d$ تعمیم قانون کلی
- "o"می تواند هرنقطه ای باشد — شتاب مرکزجرم — فاصله oتا G

- اگر oنقطه دوران مطلق باشد؛

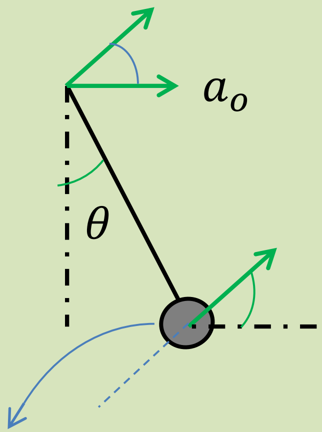


- $\bar{a} = d\alpha$
- $\sum M_O = I_G\alpha + md^2\alpha = (\underbrace{I_G + md^2}_{I_o})\alpha \longrightarrow \sum M_O = I_o\alpha$

- اگر نقطه oدارای حرکت خطی باشد؛

- $\sum M_O = I_G \alpha + m\bar{a}d$

مولفه شتاب عمودبرd



$$\bar{a} = a_o \cos\theta + d\alpha$$

$$\sum M_O = I_G \alpha + m(a_o \cos\theta + d\alpha)d$$

$$\sum M_O = I_G \alpha + md^2\alpha + ma_o \cos\theta\, d = I_o \alpha + mad_o \cos\theta$$

- ادامه مثال قبل ؛

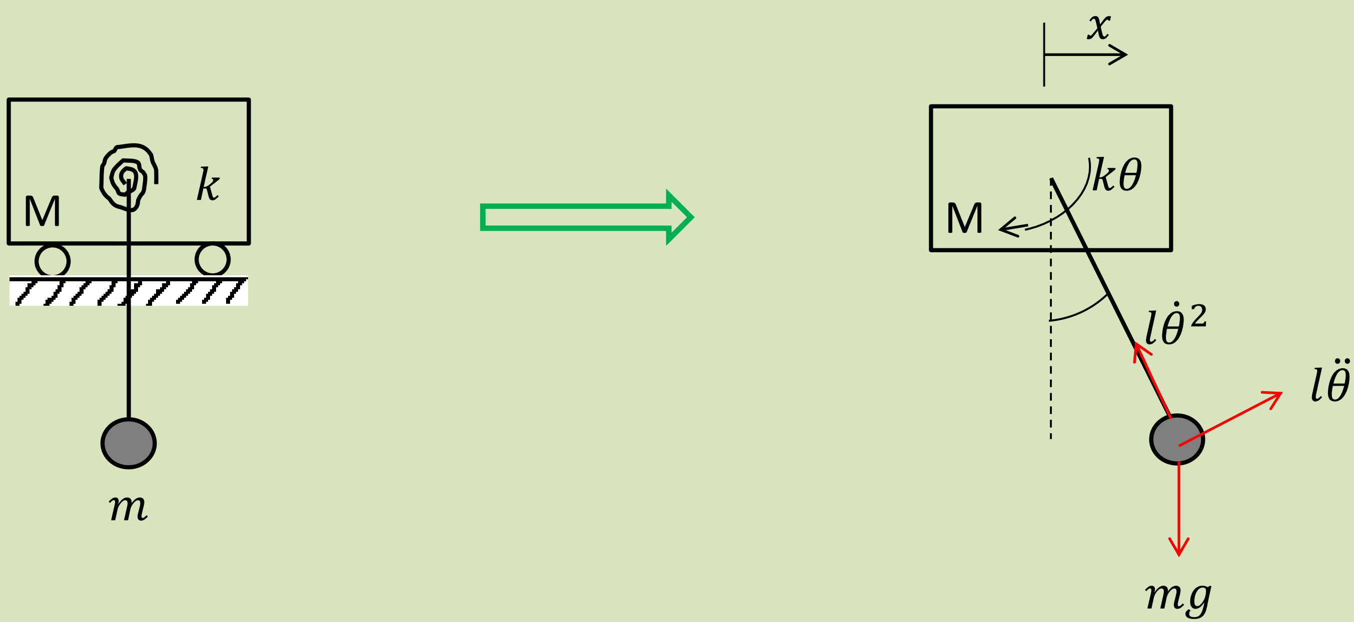
- $\begin{bmatrix} M+m & ml \\ 1 & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = 0$

- $$\left|\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M+m & ml \\ 1 & l \end{bmatrix}\right| = 0$$

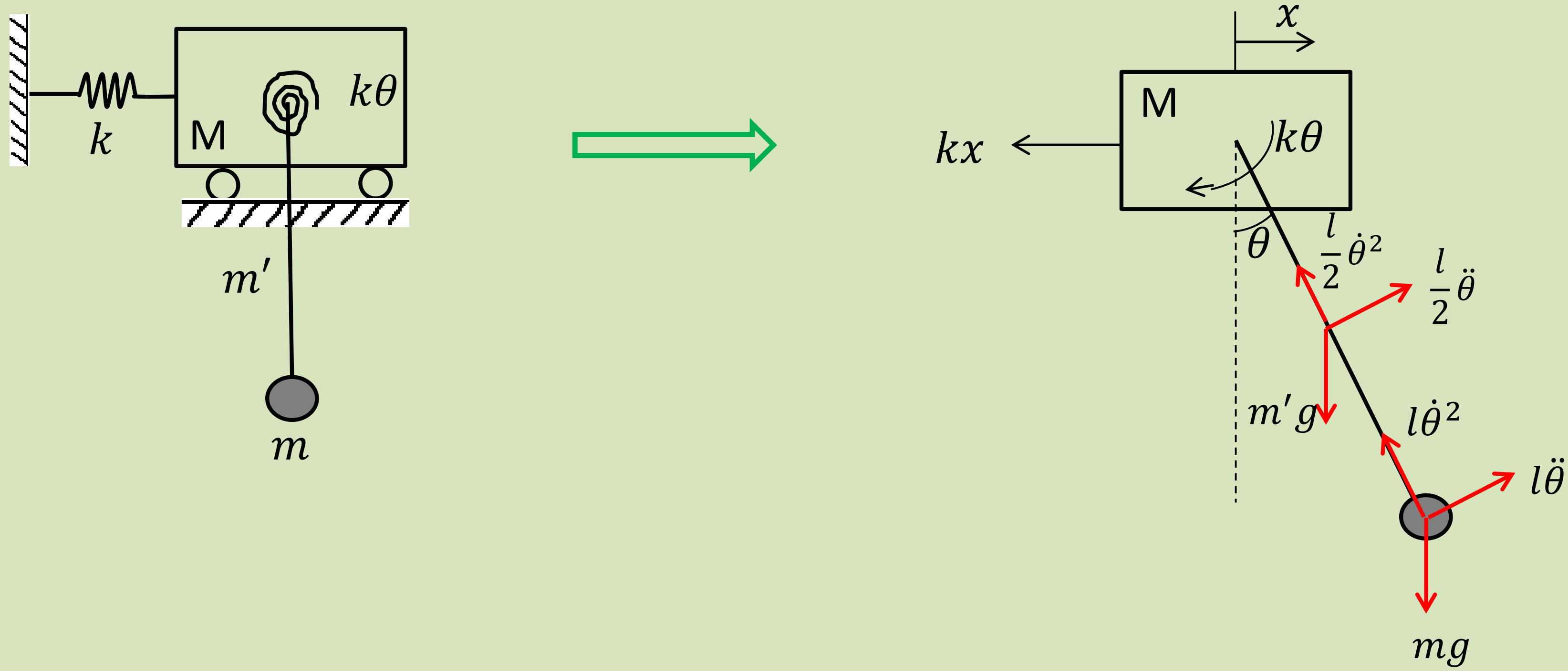
$$\longrightarrow \quad \omega = 0 \quad , \quad \omega = \sqrt{\frac{(M+m)}{Ml}\, g}$$

- تمرین : فرکانس های طبیعی سیستم های را استخراج کنید.

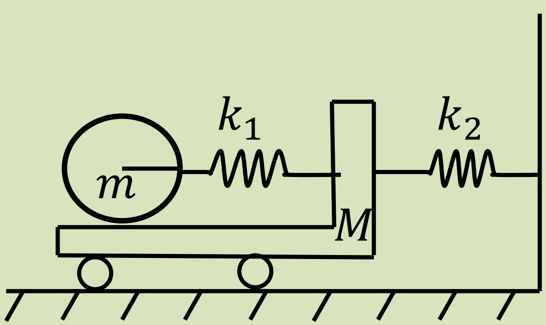
- -(1)



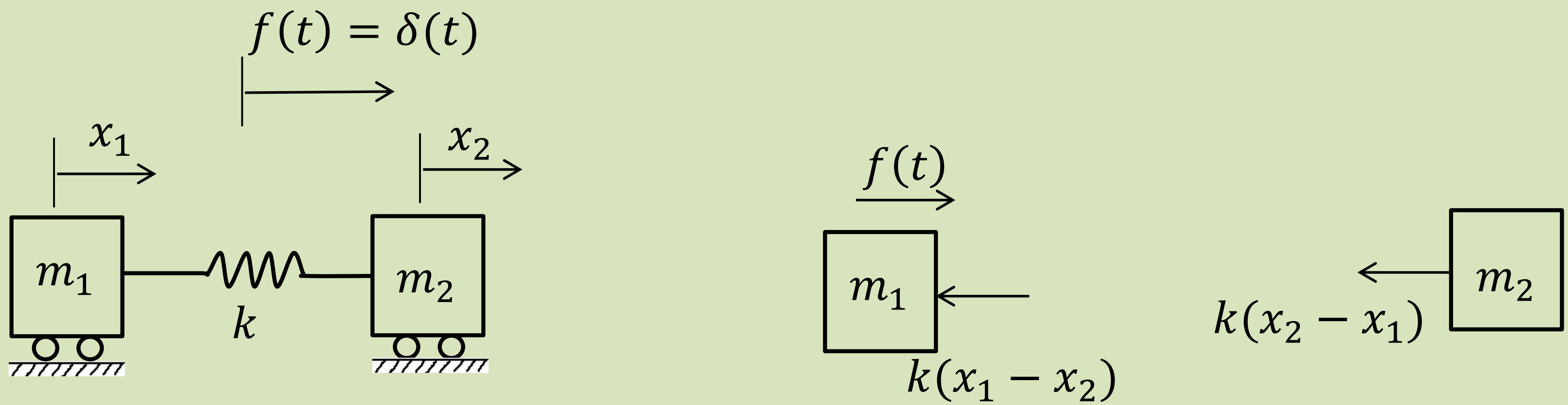
- (2)-: مثال قبل را با فرض میله با جرم m' حل کنید.
- (3)-؛



- (4)-: یک باربافرض وجود k_2 ویک بار بدون آن حل کنید.



- روش تبدیل لاپلاس؛



$$\begin{cases} -k(x_1 - x_2) + f(t) = m_1\ddot{x}_1 \\ -k(x_2 - x_1) = m_2\ddot{x}_2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + kx_1 - kx_2 = f(t) \\ m_2\ddot{x}_2 + kx_2 - kx_1 = 0 \end{cases}$$

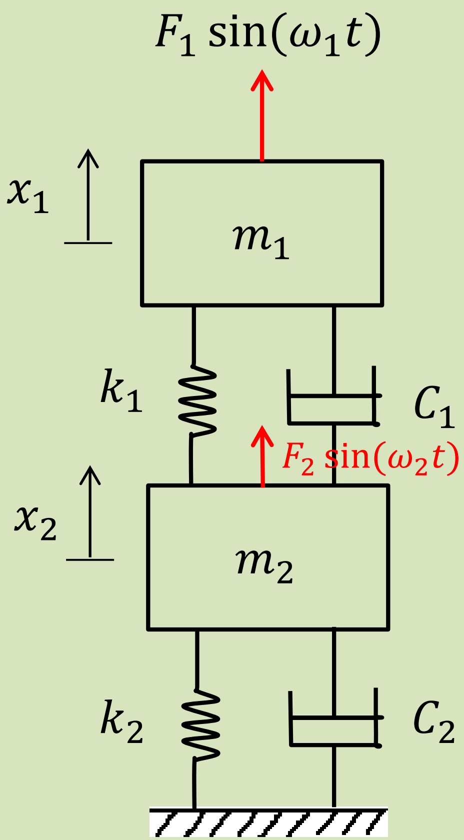
$$\begin{cases} m_1[s^2X_1(s) - \dot{X}_1(0) - sX_1(0) + kX_1(s) - kX_2(s) = L\{f(t)\} \\ m_2[s^2X_2(s) - \dot{X}_2(0) - sX_1(0)] + kX_2(s) - kX_1(s) = 0 \end{cases}$$

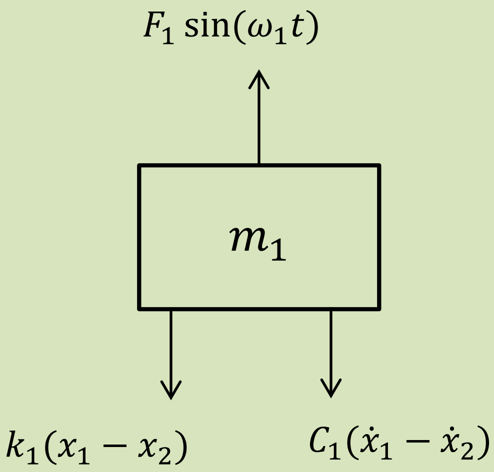
- حال مسئله رابا فرض $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ و $m_1 = m_2 = 1$ و $k = 1$, $f(t) = \delta(t)$ حل

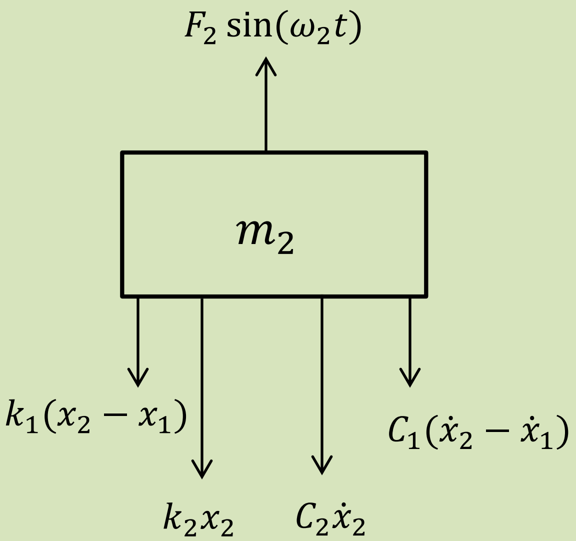
- می کنیم.

-
- $L\{f(t)\} = L\{\delta(t)\} = 1$
- $\begin{cases} s^2 X_1(s) + X_1(s) - X_2(s) = 1 \\ s^2 X_2(s) + X_2(s) - X_1(s) = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{r} \\ (s^2+1)\times \end{array} \begin{cases} (s^2 + \cancel{1)X_1}(s) - X_2(s) = 1 \\ (s^2+1)X_2(s) - \cancel{X_1}(s) = 0 \end{cases}$
- $[(s^2+1)^2 - 1]X_2(s) = 1$
- $\longrightarrow \quad X_2(s) = \frac{1}{s^4+2s^2}$
- & $\longrightarrow \quad X_1(s) = \frac{s^2+1}{s^4+2s^2} = \frac{s^2+1}{s^2(s^2+2)} = \frac{1}{s^2(s^2+2)} + \frac{1}{s^2+2}$
- $x_2(s) = \frac{1}{2}[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+2}] \quad \Rightarrow \quad x_2(t) = \frac{1}{2}[t - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}\,t)]$
- $x_1(s) = \frac{1}{s^2+2} + \frac{1}{2}[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+2}]$
- $\Rightarrow \quad x_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}\,t) + \frac{1}{2}[t - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}\,t)]$

- سیستم های دو درجه آزادی تحت ارتعاشات اجباری ؛







$$\begin{cases} \sum F_{x_1} = m_1 \ddot{x}_1 \\ \sum F_{x_2} = m_2 \ddot{x}_2 \end{cases}$$

- $$\begin{cases} -k_1(x_1 - x_2) - C_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + F_1 \sin(\omega_1 t) = m_1 \ddot{x}_1 \\ -k_2 x_2 - C_2 \dot{x}_2 - C_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_1(x_2 - x_1) + F_2 \sin(\omega_2 t) = m_2 \ddot{x}_2 \end{cases}$$
- $$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + C_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_1 x_1 - k_1 x_2 = F_1 \sin(\omega_1 t) \\ m_2 \ddot{x}_2 - C_1 \dot{x}_1 + (C_1 + C_2)\dot{x}_2 - k_1 x_1 + (k_1 + k_2) x_2 = F_2 \sin(\omega_2 t) \end{cases}$$
- $$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 & -C_1 \\ -C_1 & C_1 + C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \sin(\omega_1 t) \\ F_2 \sin(\omega_2 t) \end{bmatrix}$$
- فرض می کنیم $\omega_1 = \omega_2 = \omega$.
- حل خصوصی+ حل همگن =حل کلی
- حل همگن را در جلسات گذشته بدست آوردیم.حال به حل خصوصی می پردازیم؛
- $F_1 \sin(\omega t) = Im(F_1 e^{i\omega t})$
- $F_2 \sin(\omega t) = Im(F_2 e^{i\omega t})$

- چون تحریک خارجی به صورت سینوسی و با فرکانس ω است،پس انتظار می رود که پاسخ
- نیز به صورت سینوسی وبا اختلاف نسبت به ورودی باشد.
- $X_1(t) = \bar{X}_1 e^{i\omega t} \quad , \quad X_2(t) = \bar{X}_2 e^{i\omega t}$
- $\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\bar{X}_1\omega^2 e^{i\omega t} \\ -\bar{X}_2\omega^2 e^{i\omega t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X}_1\omega i e^{i\omega t} \\ \bar{X}_2\omega i e^{i\omega t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X}_1 e^{i\omega t} \\ \bar{X}_2 e^{i\omega t} \end{bmatrix} =$
- $\begin{bmatrix} F_1 e^{i\omega t} \\ F_2 e^{i\omega t} \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} -m_1\omega^2 & 0 \\ 0 & -m_2\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11}\omega i & C_{12}\omega i \\ C_{21}\omega i & C_{22}\omega i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$
- $\underbrace{\begin{bmatrix} -m_1\omega^2 + C_{11}\omega i + k_{11} & C_{12}\omega i + k_{12} \\ C_{21}\omega i + k_{21} & -m_2\omega^2 + C_{22}\omega i + k_{22} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$

- $\begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|}$ [ماتریس الحاقی] $\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$
- $* \, [B] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longrightarrow [B]^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$
- پاسخ سیستم های دو درجه آزادی در حالت کلی ؛
- حل خصوصی+ حل همگن =حل کلی
- فرکانس های طبیعی : $|[k]-[M]\omega^2| = 0$
- حل همگن :

$$\begin{cases} x_1 = A_{11} \sin(\omega_{n_1} t + \psi_1) + A_{12} \sin(\omega_{n_2} t + \psi_2) \\ x_2 = A_{21} \sin(\omega_{n_1} t + \psi_1) + A_{22} \sin(\omega_{n_2} t + \psi_2) \end{cases}$$

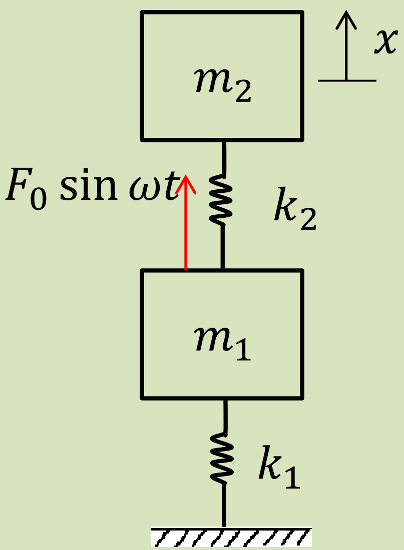
- حل خصوصی : $([k] + [C]\omega i - [M]\omega^2) \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{bmatrix} = \checkmark$
- $Im(\bar{X}_1 e^{i\omega t}) = x_1(t) \rightarrow$ خصوصی $\quad Im(\bar{X}_2 e^{i\omega t}) = x_2(t) \rightarrow$ خصوصی

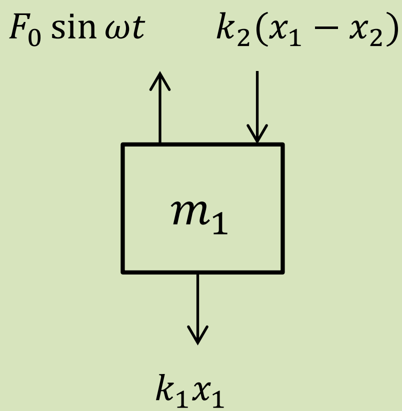
تحریک

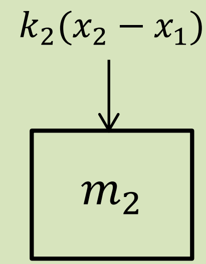
- اعمال شرایط اولیه ؛
- 6 مجهول داریم، ولی 2 تا از آنها به هم وابسته هستند وداریم؛

- $\frac{A_{11}}{A_{21}} = (\frac{A_1}{A_2})^{\omega_{n1}}$ $\qquad$ $\frac{A_{12}}{A_{22}} = (\frac{A_1}{A_2})^{\omega_{n2}}$

- جاذب ارتعاش ؛







$$\begin{cases} -k_2(x_1 - x_2) - k_1 x_1 + F_0 \sin \omega t = m_1 \ddot{x}_1 \\ -k_2(x_2 - x_1) = m_2 \ddot{x}_2 \end{cases}$$

-

- $$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \sin \omega t \\ 0 \end{bmatrix}$$

- دو راه داریم؛ یا از ابتدا $(k - m\omega^2) \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$

- $F_0 \sin \omega t = F_0\, Im(e^{i\omega t})$

- $x_1(t) = \bar{X}_1 e^{i\omega t} \qquad , \qquad x_2(t) = \bar{X}_2 e^{i\omega t}$

- یا اینکه x_1,x_2 را جاگذاری کنیم و پاسخ را بدست آوریم.

- $$\left(\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- $$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - m_1\omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- $$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{[(k_1+k_2-m_1\omega^2)(k_2-m_2\omega^2)-k^2} \begin{bmatrix} k_2 - m_2\omega^2 & {k_2}^2 \\ {k_2}^2 & k_1 + k_2 - m_1\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- $$\bar{x}_1 = \frac{1}{|A|}(k_2 - m_2\omega^2)F_0$$

- $$k_2 - m_2\omega^2 = 0 \qquad \omega = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$$

- همانطور که معادله نشان می دهد،چنانچه تحریکی به m_1 اعمال شود ونیز بر روی آن جرم

- دیگری به اندازه m_2 با فنریت k_2 قرار گیرد،اگر فرکانس تحریک برابر با $\sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$ باشد، آنگاه جرم

- m_1 ارتعاش نخواهد کرد و دامنه حرکت آن صفر می شود.به جرمی مانند m_2 که باعث چنین رفتاری

- در سیستم می شود،جاذب ارتعاش می گویند.

- The End