

کمیت‌های فیزیکی: کمیت‌های فیزیکی به دو دسته کمیت‌های اسکالر و کمیت‌های برداری تقسیم می‌شوند

* کمیت‌های اسکالر: کمیت‌هایی که تنها با یک عدد به طور کامل بیان می‌شوند و از قواعد جبری پیروی می‌کنند را کمیت‌های اسکالر یا نرده‌ای می‌نامیم مانند جرم، حجم، مساحت

* کمیت‌های برداری: کمیت‌هایی هستند که علاوه بر اندازه دارای جهت نیز می‌باشند مانند نیرو، سرعت، جابجایی، و آنها را با بردار مشخص می‌کنیم مانند، نیرو، سرعت، وزن

* واحد اندازه‌گیری: برای آنکه مقادیر حاصل از اندازه‌گیری‌های مختلف یک کمیت برآحتی باهم مقایسه پذیر باشند برای هر کمیت فیزیکی یک یکا (واحد) تعریف می‌کنیم مثلاً واحد طول (متر)، واحد جرم (کیلوگرم) و ...

* یکاهای اصلی و یکاهای فرعی: در عمل نیازی نیست برای هر کمیت فیزیکی یکای مستقلی تعریف کنیم. آن دسته از کمیت‌هایی که یکای آنها بطور مستقل تعریف شده‌اند را کمیت‌های اصلی و یکاهای آنها را یکای اصلی می‌نامیم و سایر کمیت‌ها که بطور مستقل یکای خاصی ندارند و تابع کمیت‌های اصلی می‌باشند را کمیت‌های فرعی می‌نامیم

* جدول پنج کمیت اصلی و یکاهای اصلی آنها با تعداد اصلی آنها در جدول زیر نمایش داده شده‌اند (سیستم SI)

* پیشوندهای SI : در اندازه گیری ها

گاهی با اعداد بسیار بزرگ یا خیلی

کوچک مواجه می شویم که محاسبات و

کار با آنها دشوار می باشد در جدول

صفحه بعد پیشوندها و ضرایب تبدیل

آنها بطور کامل نوشته شده است

کمیت	نام یکا	نماد یکا
طول	متر	m
زمان	ثانیه	s
جرم	کیلوگرم	kg
جریان الکتریکی	آمپر	A
دما	کلوین	K

پیشوند	ضریب تبدیل	نماد	پیشوند	ضریب تبدیل	نماد
دسی	10^{-1}	d	دکا	10^1	da
سنتی	10^{-2}	c	هکتو	10^2	h
میلی	10^{-3}	m	کیلو	10^3	k
میکرو	10^{-6}	μ	مگا	10^6	M
نانو	10^{-9}	n	گیگا	10^9	G
پیکو	10^{-12}	p	ترا	10^{12}	T

* مثال: یک کیلو متر چند نانومتر می باشد

$$1 \text{ km} = 1(1000) \text{ m} = 1(1000)(10^9) \text{ nm} = 10^{12} \text{ nm}$$

* مثال: هزار کیلو متر چند میکرون می باشد

$$1000 \text{ km} = 1000(1000) \text{ m} = (1000)(1000)(10^6) \mu = 10^{12} \mu$$



مثال: یک میکرون چند سانتی متر است

$$1\mu = 1(10^{-6})m = (1)(10^{-6})(100cm) = 10^{-6} \times 10^2 cm = 10^{-4} cm$$

مثال: دو میکرو متر چند کیلومتری باشد.

$$2\mu m = (2)(10^{-6})(10^{-3} km) = 2 \times 10^{-9} km$$

* **نمادگذاری علمی:** بجز استفاده از پیشوندها در فیریک برای سهولت در محاسبات اعداد خیلی بزرگ را بصورت حاصل ضرب عددی بزرگتر از یک (۱) یا مساوی با یک (۱) و کوچکتر از (۱۰) و ضربی بتوان صحیحی از (۱۰) می نویسیم

مثال:

$$382 \times 10^3 km = 382 \times 10^3 \times 1000 m = 3,82 \times 10^8 m$$

$$(ب) 0.529 nm = 0.529 \times 10^{-9} m = 5,29 \times 10^{-11} m$$

$$(ج) 199 \times 10^{28} kg = 1,99 \times 10^{40} kg$$

* **نکته:** عددهای مشخص شده در دایره باید بین عدد یک و ده باشند.

مثال های بیشتر:

$$14,7 \times 10^{-25} g = 1,47 \times 10^{-24} g = 1,47 \times 10^{-27} kg$$

$$241 cm = 2,41 \times 10^{-1} cm = 2,41 \times 10^{-2} m$$

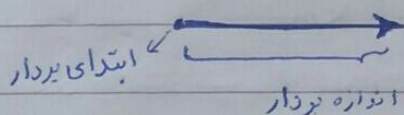
$$0.0015 s = 1,5 \times 10^{-3} s$$

نمونه



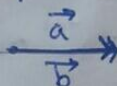
بیردار: قطعه خطی است که دارای مبدأ (نقطهٔ اثر)، جهت و راستا و طول می باشد.
هر بردار را می توان به کمک یکسانی نشان داد که جهت، راستا و مبدأ
آن نقاشیگر جهت تأثیر، راستای تأثیر و نقطهٔ اثر آن بردار است. طول
یکان (→) با بزرگی (اندازه) بردار متناسب است.

* نکته: بردارها را با حروف انگلیسی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و ... نمایش می دهیم

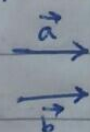


نکته: چون بردارها کمیت های هستند که علاوه بر بزرگی جهت نیز دارند بنابراین
عملیات مربوط به آنها (جمع و تفریق و ...) طبق قوانین معینی صورت می گیرد
که با عملیات جبری متفاوت می باشد

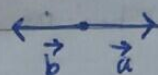
دو بردار مساوی: دو بردار وقتی مساوی اند که هم راستا، هم جهت و دارای
بزرگی (اندازه) یکسان می باشند



دو بردار همسنگ: دو بردار وقتی همسنگ هستند که هم اندازه، هم جهت و دارای
راستای موازی هم باشند



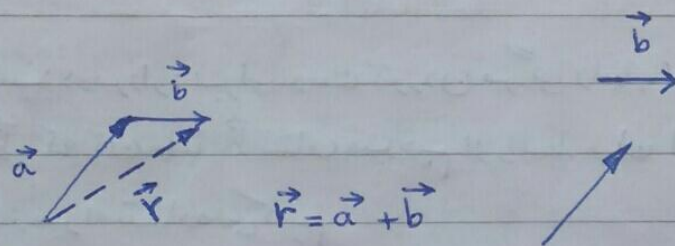
دو بردار متقابل: اگر دو بردار هم اندازه و هم راستا، دارای مبدأ مشترک ولی
از لحاظ جهت مخالف یکدیگر باشند بیایند این دو بردار حتماً چه خواهیم دید
برابر با صفر می باشد



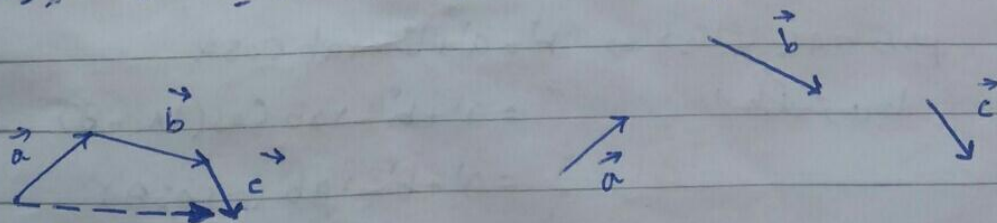
مثال: دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ متقابل هستند.

جمع برداری دو بردار: جمع برداری دو بردار عبارتست از برداری که از لحاظ اثر بتواند به تنهایی جانشین آن دو بردار گردد.

برای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داشته باشیم جمع این دو بردار $(\vec{r})$ که برای دو بردار نامیده میشود از رابطه زیر بدست می آید. برای بدست آوردن بردار $\vec{r}$ و $\vec{b}$ در شکل (۱) ابتدا از انتهای بردار $(\vec{a})$ همسنگ $\vec{b}$ را رسم می کنیم در این صورت بردار $\vec{r}$ نشانگر بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ می باشد.



نکته: اگر چند بردار مانند $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ داشته باشیم برای یکنی بردار این چند بردار، از انتهای $\vec{a}$ همسنگ $\vec{b}$ و سپس از انتهای $\vec{b}$ همسنگ $\vec{c}$ را رسم می کنیم و این عمل را ادامه میدهیم. در نهایت برداری که ابتدای $\vec{a}$ را به انتهای آخرین بردار وصل کنید بردار $\vec{r}$ نامیده میشود.



$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$



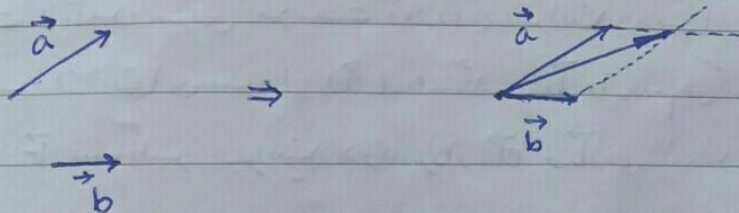
ص ۴

تاریخ:

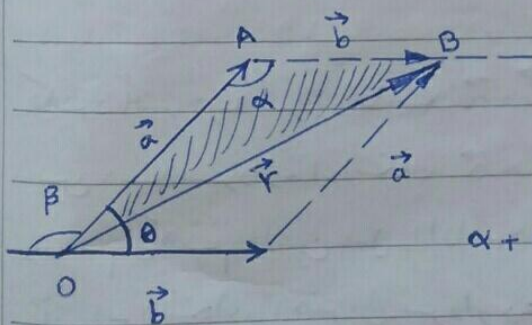
موضوع:



طریقه متوازی الاضلاع: برای یقین برانید دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ می‌توانیم به طریق زیر که موسوم به طریقه متوازی الاضلاع است نیز عمل کنیم در این روش همسنگ $\vec{a}$ را از مبدأ $\vec{b}$ رسم می‌کنیم و سپس بر روی این دو بردار که در نقطه مشترک هستند متوازی الاضلاعی بنا می‌کنیم قطر این متوازی الاضلاع که از نقطه می‌گذرد برانید دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ می‌باشند



بزرگی برانید دو بردار: برای بدست آوردن بزرگی (اندازه) برانید دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که آن را با نشان می‌دهیم از رابطه میان اضلاع مثلث OAB در شکل زیر استفاده می‌کنیم



θ : زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$

طبق مثلث داریم $\beta + \theta = 180^\circ$ و $\beta = \alpha$

پس داریم $\alpha + \theta = 180^\circ \Rightarrow \boxed{\alpha = 180^\circ - \theta}$ ①

$\Rightarrow$ در مثلث OAB داریم $r^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$

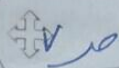
رابطه کسینوس ها

$$= a^2 + b^2 - 2ab \cos(180^\circ - \theta)$$

$$= a^2 + b^2 - 2ab(-\cos \theta)$$

$$= a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta \Rightarrow$$

$$\boxed{r^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta}$$

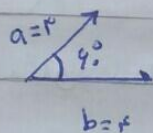


تاریخ: / /

موضوع:



مثال یک: دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که به ترتیب دارای اندازه $a=3$ و $b=4$ مسافتی متری باشند. عرض می باشد. اندازه $\vec{r}$ برآیند این دو بردار را محاسبه کنید. زاویه بین دو بردار 60° می باشد.



حل: $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ $a=3$ $b=4$ $\theta=60^\circ$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta} = \sqrt{3^2 + 4^2 + 2(3)(4)(\frac{1}{2})} = \sqrt{37}$$

مثال: برآیند بردارهای زیر را محاسبه کنید.
الف) $a=3\text{cm}$ $b=4\text{cm}$ $\theta=0^\circ$ $\cos(0)=1$

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2 + 2(3)(4)(1)} = \sqrt{49} = 7$$

بنابراین اگر دو بردار هم جهت باشند و هم راستا برآیند آنها برابر است با مجموع

آن دو بردار پس $r = a + b = 3 + 4 = 7$

ب) $a=3$ $b=4$ $\theta=180^\circ$ $\cos 180^\circ = -1$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta} = \sqrt{3^2 + 4^2 + 2(3)(4)(-1)} = \sqrt{9 + 16 - 24} = \sqrt{1} = 1$$

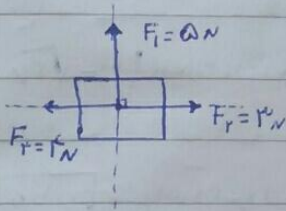
بنابراین اگر دو بردار مختلف جهت و هم راستا باشند اندازه برآیند

آنها برابر است با تفاضل اندازه آن دو بردار

$$r = |a - b| = |3 - 4| = 1$$

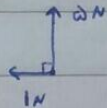
نکته: در قیاس بجای بردارها کمیت های برداری مثل نیرو، سرعت و شتاب و... جایگزین یک بردار میشوند

مثال: سه نیرو به صورت مقابل بر مرکز جرمی اثر کرده اند. برای این سه نیرو را محاسبه کنید.



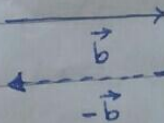
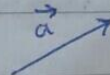
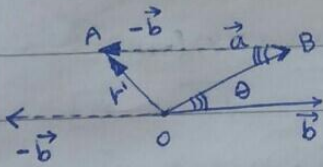
حل: مرکز جرم را مرکز یک محور مختصات در نظر میگیریم و هر نیرو را مثل یک بردار در نظر میگیریم. آنگاه برای نیروهای روی محور x ها و y ها

روی محور y ها را محاسبه کرده و نهایتاً با استفاده از فرمول برای دو بردار مقدار اهل ی کنیم



$$R = \sqrt{(1)^2 + (5)^2} = \sqrt{26}$$

تفاضل دو بردار: منظور از تفاضل دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بردار $\vec{a} - \vec{b}$ و $\vec{a} + (-\vec{b})$ میباشد که برای بدست آوردن آن از روش تریسکی شکل زیر استفاده میکنیم و بردار آن را $\vec{a}$ نمایش میدهیم.



توضیح: در مثلث OAB داریم زاویه B برابر θ برابر می باشد چون امتداد AB با بردار $\vec{b}$ موازی میباشد پس رابط کسینوس ها را برای

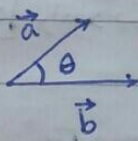
ضلع r از مثلث OAB می نویسیم و داریم:

$$\begin{cases} r^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos B \\ B = \theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow r^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

بنابراین اندازه قفاصل دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بین زاویه بین آنها برابر θ می باشد از رابطه بالا محاسبه می شود.

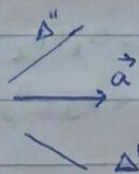
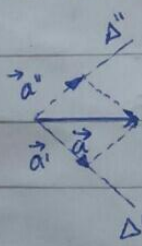
نکته: بطور خلاصه اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که اندازه آنها برابر a و b باشد و زاویه بین آنها θ باشد اندازه قفاصل و براند آنها از روابط زیر محاسبه می گردد.



$$r = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta}$$

$$r' = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}$$

* تجزیه یک بردار به دو مولفه از تجزیه بردار $\vec{a}$ بر روی دو راستای اختیاری Δ' و Δ'' که مای بردار $\vec{a}$ در یک صفحه واقع اند به ترتیب دو بردار $\vec{a}'$ و $\vec{a}''$



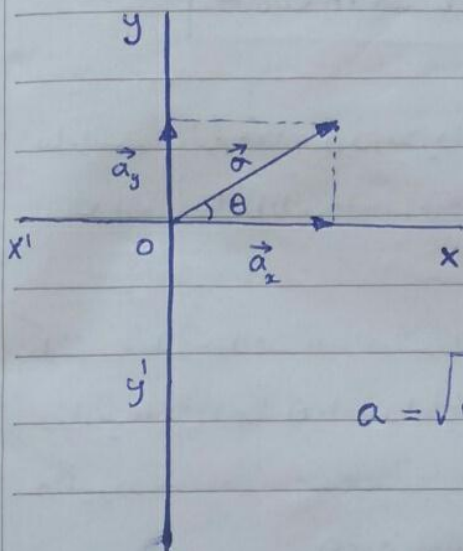
مطابق شکل زیر درست می آید.

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}''$$

کافی است از استای بردار $\vec{a}$ دو راستای Δ' و Δ'' را رسم

نموده و با خطوط فقط همین یک متوازی الضلاع تشکیل دهیم.

* تجزیه یک بردار به دو مولفه عمود بر هم، در حالت ساده‌ای که بردار $\vec{a}$ را روی دو راستای عمود بر هم $x \hat{o} x'$ و $y \hat{o} y'$ به دو مولفه تجزیه میکنیم. بردارهای $\vec{a}_x$ و $\vec{a}_y$ به ترتیب مولفه‌های بردار $\vec{a}$ بر روی محورهای x و y خواهند بود.



$$a^2 = a_x^2 + a_y^2$$

$$a_x = a \cos \theta$$

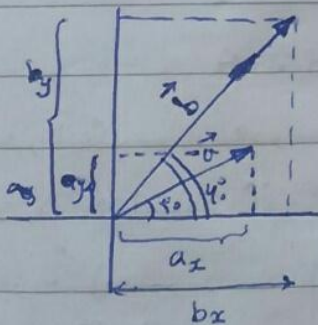
$$a_y = a \sin \theta$$

$$\tan \theta = \frac{a_y}{a_x}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

مثال: برانید دو بردار مقابل را محاسبه کنید.

$$a=1 \quad b=2$$



$$\begin{cases} a_x = a \cos \theta = (1) \cos 45^\circ = (1) \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ a_y = a \sin \theta = (1) \sin 45^\circ = (1) \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ b_x = b \cos \theta = (2) \cos 45^\circ = (2) \left(\frac{1}{2} \right) = 1 \\ b_y = b \sin \theta = (2) \sin 45^\circ = (2) \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$r_x = a_x + b_x = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$$

$$r_y = b_y + a_y = \frac{1}{2} + \sqrt{2} = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{2}$$

$$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} = \sqrt{\left(\frac{1 + \sqrt{2}}{2} \right)^2 + \left(\frac{1 + 2\sqrt{2}}{2} \right)^2}$$

مؤلف: ابراهيم خ

موضوعات محوری

$$\begin{cases} ax = a \cos \alpha \\ bx = b \cos \beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_y = a \sin \alpha \\ b_y = b \sin \beta \end{cases}$$

$$r_x = a_x + b_x$$

$$r_y = a_y + b_y$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}$$

مثال: برای سه بردار شکل مقابل را محاسبه کنید اگر داشته باشیم $a=1$ و $b=3$ و $c=2$ که مقادیر داده شده اندازه سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ میباشند.

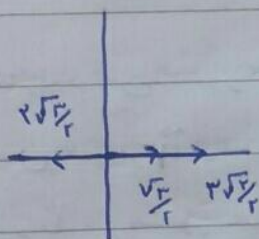
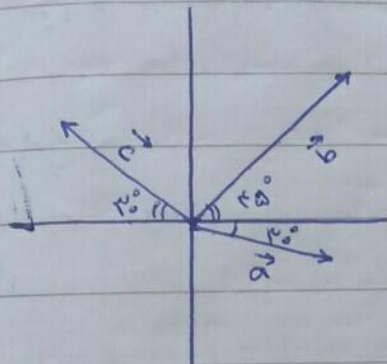
حل: ابتدا برای سه بردارها بر محور x را محاسبه

می کنیم و سپس برای سه بردارها بر محور y را

محاسبه می نماییم آنجا از ضرب

$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}$ استفاده کرده و برای سه مای

را محاسبه می نماییم.

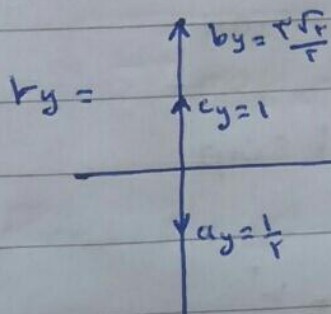


$$b_x = b \cos 45^\circ = 3 \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$a_x = a \cos 135^\circ = (1) \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$c_x = c \cos 30^\circ = 2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$r_x = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3} = \frac{4\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$



$$b_y = b \sin 45^\circ = \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$c_y = c \sin 30^\circ = (2) \left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$a_y = a \sin 135^\circ = (1) \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

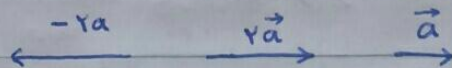
$$r_y = b_y + c_y - a_y = \frac{3\sqrt{2}}{2} + 1 - \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{2} + 1}{2}$$

$$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} = \sqrt{\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{2} + 1}{2}\right)^2}$$

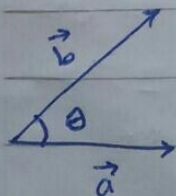


ضرب بردارها: چون بردارها علاوه بر اندازه دارای جهت نیز می باشند ضرب برداری از قواعد جبری ضرب کسب های اسکالر کاملاً پیروی نکند و برای این ضرب باید قواعد دیگری در نظر گرفت. سه نوع ضرب متداول در مورد بردارها عبارتست از: ۱- ضرب یک بردار در یک کسب اسکالر ۲- ضرب اسکالر ۳- ضرب برداری.

الف: ضرب یک بردار در یک کسب اسکالر: حاصل ضرب یک بردار $\vec{a}$ در کسب اسکالر k بردار جدیدی است که اندازه آن کاملاً برابر اندازه بردار $\vec{a}$ می باشد. جهت این بردار اگر k مثبت باشد هم جهت با $\vec{a}$ و اگر k منفی باشد در خلاف جهت $\vec{a}$ می باشد. نیرو $\vec{F} = m\vec{a}$ و $\vec{P} = m\vec{v}$ نمونه هایی از این نوع ضرب می باشد.



* ضرب اسکالر: حاصل ضرب اسکالر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که با یکدیگر زاویه θ می سازند بنا به تعریف عددی است جبری مانند c که از رابطه $c = ab \cos \theta$ بدست می آید که در آن a و b به ترتیب اندازه دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ می باشند. ضرب اسکالر را ضرب داخلی هم می نامیم.



$$c = ab \cos \theta$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \theta$$

زاویه بین دو بردار

ضرب اسکالر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که یک عدد جبری می باشد

اندازه $\vec{a}$ اندازه $\vec{b}$

اگر زاویه θ حاد باشد $0 < \theta < 90$ و بنابراین $\cos \theta > 0$ و c مثبت می باشد
یعنی حاصلضرب اسکالر $\vec{a} \cdot \vec{b}$ مثبت می باشد چنانچه θ زاویه منفرجه
باشد یعنی $90 < \theta < 180$ و بنابراین $\cos \theta < 0$ (منفی) و حاصلضرب $\vec{a} \cdot \vec{b}$ منفی
می باشد اگر $\theta = 90$ درجه باشد $\cos \theta = 0$ و دوبردار هم عمود می باشند
و بنابراین $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ و اگر $\theta = 180$ درجه باشد دوبردار در یک راستا
ولی مختلف جهت می باشد $\vec{a} \cdot \vec{b} = -ab$

* نکته: حاصلضرب $\vec{a} \cdot \vec{b}$ بستگی به ترتیب عوامل ندارد

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} = a \cdot b \cos \theta$$

* محاسبه حاصلضرب اسکالر دوبردار وقتی مختصات آن دوبردار داده

میشود به صورت زیر بیان می گردد. اگر داشته باشیم $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$

و $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ آنگاه $\vec{a} \cdot \vec{b}$ برابر است:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

مثال: آله داشته باشیم $\vec{a} = (1, 2, 4)$ و $\vec{b} = (0, 4, 7)$ آنگاه $\vec{a} \cdot \vec{b}$ را محاسبه کنید

$$\text{حل: } \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = (1)(0) + (2)(4) + (4)(7) = 0 + 8 + 28 = 36$$

* نکته: اگر یک بردار به مختصات $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ داشته باشیم اندازه $\vec{a}$ را با a نمایش می‌دهیم و برابر است با:

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

اندازه بردار $\vec{a}$

* نکته: گاهی بردار $\vec{a}$ را با مجموع مولفه‌هایش در دستگاه مختصات نمایش می‌دهند. در این حوزه بردار $\vec{a}$ را بصورت $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ نمایش می‌دهیم و یا $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ نشان می‌دهیم.

نکته: از حاصلضرب اسکالر بین دو بردار برای محاسبه زاویه بین دو بردار استفاده می‌کنیم.

مثال: دو بردار $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ و $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ مفروض می‌باشد مطلوب است محاسبه $\vec{a} \cdot \vec{b}$ (ب) زاویه بین دو بردار را محاسبه کنید.

$$\text{حل: } \vec{a} \cdot \vec{b} = (1)(2) + (2)(1) + (3)(1) = 7$$

$$\vec{a} \text{ اندازه } a = \sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (3)^2} = \sqrt{14}$$

$$\vec{b} \text{ اندازه } b = \sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (1)^2} = \sqrt{6}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab} \Rightarrow$$

$$\cos \theta = \frac{7}{\sqrt{14} \sqrt{6}} = \frac{7}{2\sqrt{21}} \Rightarrow \cos \theta = 0.77 \Rightarrow \theta = \approx 39^\circ$$

مثال: بردار $\vec{a} = (2, 1, 0)$ و بردار $\vec{b} = (4, 0, 1)$ می‌باشد الف: اندازه هر بردار را محاسبه کنید (ب) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ را محاسبه کنید ج $\vec{a} + \vec{b}$ را محاسبه کنید (د) زاویه بین دو بردار را محاسبه کنید.

$$\text{الف: } a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (0)^2} = \sqrt{5}$$

$$b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} = \sqrt{(4)^2 + (0)^2 + (1)^2} = \sqrt{17}$$

$$\text{ب: } \vec{a} \cdot \vec{b} = (2)(4) + (1)(0) + (0)(1) = 8 + 0 = 8$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\text{ج: } \vec{a} + \vec{b} = (4+2, 0+1, 1+0) = (6, 1, 1)$$

$$\text{د: } \vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab} = \frac{8}{\sqrt{5} \sqrt{17}} \Rightarrow$$

$$\theta = \text{ArcCos} \left(\frac{8}{\sqrt{85}} \right)$$

* شرط اسکالر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برهم عمود باشند این است که $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ باشد

مثال: دو بردار $\vec{a} = (1, 0, m)$ و $\vec{b} = (4, 7, 1)$ برهم عمود می‌باشد مقدار m را محاسبه کنید

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0 \Rightarrow$$

$$(1)(4) + (0)(7) + (m)(1) = 0 \Rightarrow$$

$$4 + 0 + m = 0 \Rightarrow \boxed{m = -4}$$

* ضرب خارجی دو بردار: اگر بردار $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ و بردار $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ را داشته باشیم ضرب خارجی دو بردار (ضرب برداری) را بصورت $\vec{a} \times \vec{b}$ نمایش میدهیم که حاصل آن یک برداری باشد

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \quad \vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$$

$$\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = i(a_y b_z - b_y a_z) - j(a_x b_z - a_z b_x) + k(a_x b_y - a_y b_x)$$

$$- j(a_x b_z - a_z b_x) + k(a_x b_y - a_y b_x)$$

مثال اگر داشته باشیم $\vec{a} = (2, 1, 3)$ و $\vec{b} = (4, 0, 5)$ آنگاه الف: $\vec{a} \times \vec{b}$ را بدست آورید. (ب) اندازه $\vec{a} \times \vec{b}$ را بدست آورید.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = i(5 - 0) - j(10 - 12) + k(0 - 4) = 5i - 2j - 4k \Rightarrow$$

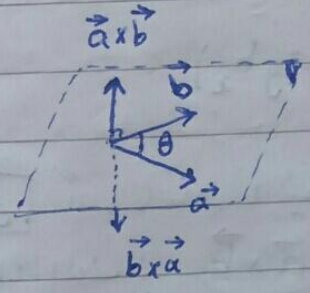
$$\vec{a} \times \vec{b} = 5i - 2j - 4k$$

$$(ب) |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(5)^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25 + 4 + 16} = \sqrt{45}$$

↓
اندازه $\vec{a} \times \vec{b}$

نمایش هندسی ضرب خارجی دو بردار: اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار در یک صفحه باشند حاصلضرب $\vec{a} \times \vec{b}$ برداری می باشد که بر صفحه این دو بردار عمود می باشد که در شکل زیر جهت آن با قانون دست راست مشخص می شود چهار انگشت در جهت بردار $\vec{a}$ بطوری که جهت بیست و شدن انگشتان به طرف بردار $\vec{b}$ باشد آنگاه انگشت شصت جهت بردار $\vec{a} \times \vec{b}$ را نشان می دهد.

نکته: اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار باشند اندازه $\vec{a} \times \vec{b}$ از رابطه زیر محاسبه می شود که θ زاویه بین دو بردار می باشد

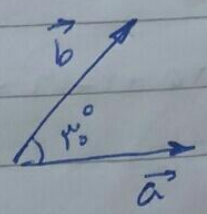


$$|\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \theta$$

θ زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ می باشد
 a و b اندازه دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ می باشد

مثال اگر $a=4$ و $b=4$ باشد و زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر 30° درجه باشد اندازه $\vec{a} \times \vec{b}$ را محاسبه کنید.

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \theta = (4)(4)(\sin 30^\circ) = (16)(\frac{1}{2}) = 8$$



مثال: دو بردار $\vec{a} = (1, 2, 2)$ و $\vec{b} = (2, 1, 0)$ در فضا وجود دارد.
 مطلوب است محاسبه (الف) $\vec{a} \times \vec{b}$ (ب) $|\vec{a} \times \vec{b}|$ (ج) $\vec{a} \cdot \vec{b}$
 (د) زاویه بین دو بردار.

$$\begin{aligned} \text{الف: } \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \vec{i}(0-2) - \vec{j}(0-4) + \vec{k}(1-(-4)) \\ &= \underline{-2\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}} \end{aligned}$$

$$\text{ب) } |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + (4)^2 + (5)^2} = \sqrt{4+16+25} = \sqrt{45}$$

$$\text{ج) } \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = (1)(2) + (-2)(1) + (2)(0) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{د) } \vec{a} \cdot \vec{b} &= ab \cos \theta \Rightarrow 0 = ab \cos \theta \Rightarrow \\ \cos \theta &= 0 \Rightarrow \theta = 90^\circ \end{aligned}$$

زاویه بین دو بردار

* نکته: برای ضرب خارجی و ضرب داخلی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داریم

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad \text{و} \quad \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

حرکت در یک بُعد: در شکل زیر جسمی بر روی محور x نمایش داده شده است. این مکان این جسم در شکل با بردار $\vec{r}$ مشخص شده است که $\vec{r}$ راسته‌ای

$$\vec{r} = x\vec{i}$$

نصورت زیر نمایش داد

در این رابط $\vec{i}$ بردار یکه در راستای محور x می باشد



$$\vec{r} = x\vec{i}$$

هنگامی که جسمی روی محور x حرکت کند در هر لحظه بردار مکان آن تغییر میکند برای توصیف حرکت جسم بر روی یک مسیر کافیه است بردار مکان جسم و نهایتاً معادله مکان زمان را داشته باشیم یعنی باید x را بصورت تابعی از زمان داشته باشیم که به آن تابع مکان زمان متحرک می گویند

$$x = f(t)$$

مثال معادله مکان زمان جسمی بصورت $x = -t^2 + 4t - 1$ می باشد بردار مکان جسم را در لحظات $t = 0.5$ و $t = 1.5$ و $t = 3.5$ بیابید.

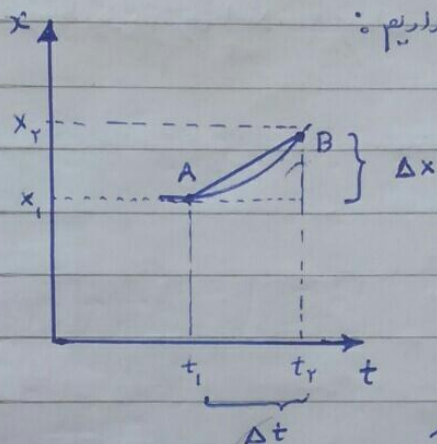
حل: $t = 0 \Rightarrow x = -t^2 + 4t - 1 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow x = 0 + 0 - 1 = -1$
 $\vec{r} = x\vec{i} \Rightarrow \vec{r} = -1\vec{i}$

$t = 1 \Rightarrow x = -t^2 + 4t - 1 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow x = -1 + 4 - 1 = 2$
 $\vec{r} = x\vec{i} \Rightarrow \vec{r} = 2\vec{i}$

$t = 3 \Rightarrow x = -t^2 + 4t - 1 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow x = -9 + 12 - 1 = -1$

$\Rightarrow \vec{r} = x\vec{i} \Rightarrow \vec{r} = -1\vec{i}$

اگر نمودار مکان-زمان چیزی را که به صورت $x = f(t)$ میبایست در ترسیم کنیم میتوان از روی آن سرعت متوسط متحرک را بین دو لحظه دلخواه محاسبه نمود. نمودار مکان-زمان متحرکی را بصورت زیر در نظر میگیریم. متحرک در زمانهای t_1 و t_2 به ترتیب در مکانهای x_1 و x_2 قرار گرفته است. طبق تعریف سرعت متوسط داریم:



$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

در این روابط $\bar{v}_x$ سرعت متوسط متحرک

و Δx را جای جایی و Δt را تغییرات زمان می‌نامیم.

$\bar{v}_x$ یا سرعت متوسط برابر شیب خطی است که دو نقطه A و B را به هم متصل می‌کند.

مثال معادله حرکت جسمی در SI با رابطه $x = 2t^2 + 1$ بیان شده است.

سرعت متوسط آن را در بازه زمانی الف تا ۲ ثانیه بدست آورید.

$$x = 2t^2 + 1 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \Rightarrow x_1 = 2(1)^2 + 1 = 3 \text{ m} \\ t_2 = 2 \Rightarrow x_2 = 2(2)^2 + 1 = 9 \text{ m} \end{cases}$$

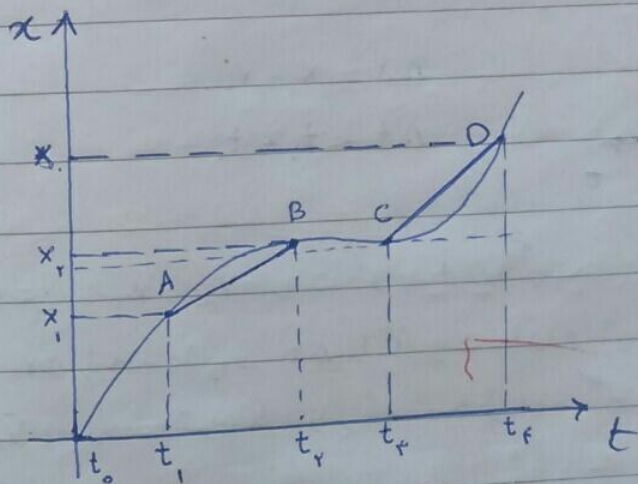
$$\Delta x = x_2 - x_1 = 9 - 3 = 6 \text{ m}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 2 - 1 = 1 \text{ s}$$

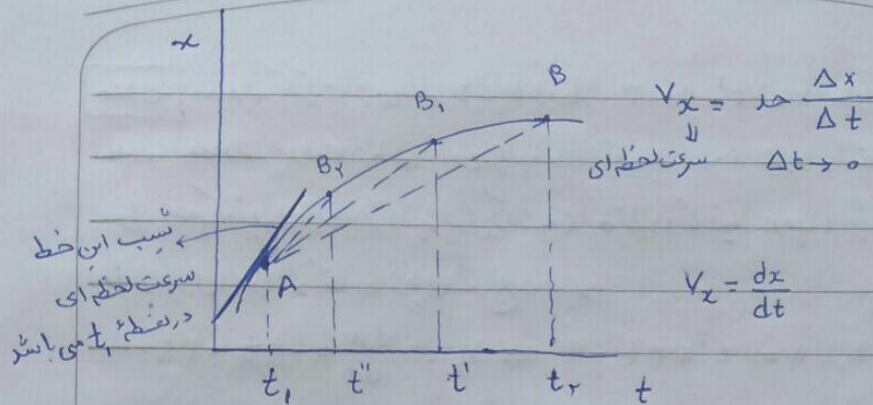
$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{6}{1} = 6 \text{ m/s}$$

* در نمودار مکان زمان شکل زیر برای محاسبه سرعت متوسط کافی است از روی شکل شیب خط AB را بدست آورد تا سرعت متوسط بین دو لحظه t_1 و t_2 بدست آید همچنین برای محاسبه سرعت متوسط بین دو لحظه t_3 و t_4 شیب خط CD را محاسبه کرد در هر بازه زمانی که شیب خط تندتر باشد سرعت متوسط نیز بیشتری باشد. به عنوان مثال سرعت متوسط $\bar{V}_{CD} > \bar{V}_{AB}$ می باشد.

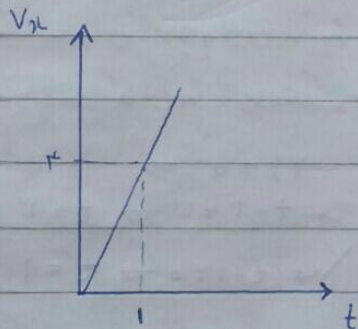
$$\bar{V}_{AB} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \rightarrow \text{سرعت متوسط}$$



* سرعت لحظه‌ای: قبلاً گفتیم که سرعت متوسط بین دو بازه زمانی در نمودار مکان زمان برابر است با شیب خطی که از آن دو نقطه رسم می‌کنیم اگر این فاصله زمانی بسیار کم و کمتر شود آنگاه نقطه B به نقطه A نزدیک و نزدیکتری شود و سرانجام خط AB در نقطه A بر نمودار مماس می‌گردد و شیب خط مماس در این حالت را سرعت لحظه‌ای جسم در لحظه t_1 می‌گوئیم و آن را با V_x نشان می‌دهیم. شکل زیر:



معادله حرکت متحرکی در SI صورت $x = 2t^2 + 1$ می باشد.



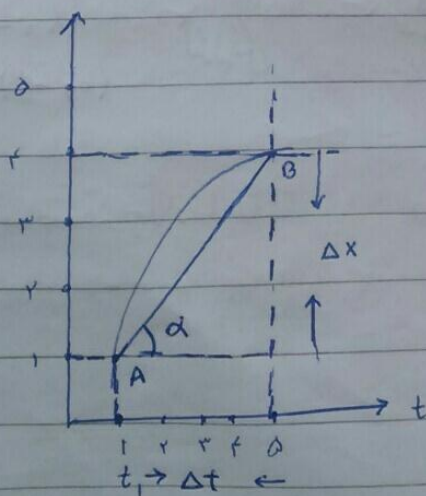
الف) معادله سرعت زمان آن را بدست آورید.
ب) نمودار سرعت زمان آن را رسم کنید.

$$v_x = 4t \Rightarrow \begin{cases} t=0 & v_x=0 \\ t=1 & v_x=4 \end{cases}$$

(0,0)

(1,4)

مثال: نمودار مکان زمان عینی صورت زیر است. سرعت متوسط آن را در فاصله زمانی t_1 تا t_2 می سنجید.



$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{4-1}{5-1} = \frac{3}{4} = 0.75 \text{ m/s}$$

$$\bar{v}_x = \tan \alpha = \frac{3}{4}$$

شیب AB

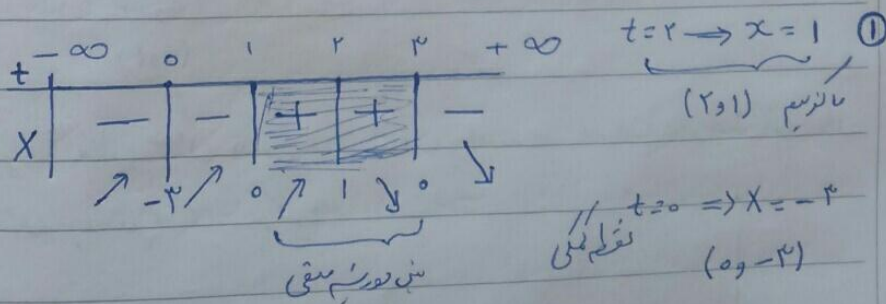
مثال: معادله حرکت جرمی در SI با رابطه $x = -t^2 + 4t - 3$ بیان شده است.
الف: معادله سرعت زمان آن را بدست آورید و ب) نمودار مکان زمان آن را رسم کنید (در چهار ثانیه اول حرکت) و ب) چگونگی حرکت جسم را بر روی نمودار مکان زمان توضیح دهید.

حل: $x = -t^2 + 4t - 3 \Rightarrow v_x = \frac{dx}{dt} = -2t + 4$

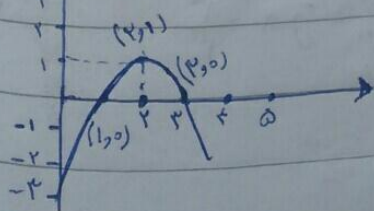
معادله سرعت زمان $v_x = -2t + 4$

برای رسم نمودار مکان زمان معادله مکان زمان را برابر صفر قرار میدهیم و زمان را بدست می آوریم یعنی ریشه معادله های مکان زمان را بدست می آوریم و عبارت مکان را تعیین می کنیم

① $x = -t^2 + 4t - 3 = 0 \Rightarrow -(t^2 + 4t + 3) = 0 \Rightarrow$
 $t - 3 = 0 \rightarrow t = 3$ (۳)
 $t - 1 = 0 \rightarrow t = 1$ (۱)
 $\frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow -2t + 4 = 0 \rightarrow t = 2$



ادامه صفحه بعد:



توضیح: معادله مکان زمان در لحظه $t=0$ متحرک در مکان $x=3$ قرار دارد با
 نزدیک شدن زمان در جهت منفی به مبدأ نزدیک میشود و در لحظه $t=1$ از مبدأ عبور
 میکند پس لحظه $t=1$ تا $t=2$ در جهت محور x حرکت میکند و در لحظه $t=2$
 سرعت آن منفی میشود و تغییر جهت میدهد و به مبدأ نزدیک میشود که در لحظه
 $t=3$ مجدداً از مبدأ عبور میکند و نسبت محور x در جهت منفی حرکت میکند
 کنیم: در لحظه $t=2$ سرعت متحرک صفر است چون شیب خط مماس در آن لحظه
 صفر است. در ضمن سرعت متحرک در هر لحظه از مشتق مکان نسبت به زمان بدست

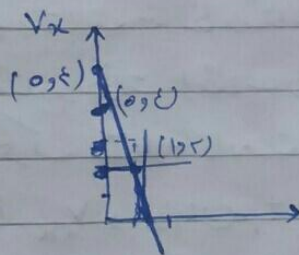
$$x = -t^2 + 2t + 3$$

می آید:

$$\Rightarrow v_x = \frac{dx}{dt} = -2t + 2 \Rightarrow v_x = -2t + 2$$

$$t=0 \Rightarrow v_x = 2 \quad (0, 2)$$

$$t=1 \Rightarrow v_x = 0 \quad (1, 0)$$



$$\begin{cases} (0, 2) \\ (1, 0) \end{cases}$$

نکته: معادله حرکت یکجمله است که جسم روی یک خط راست حرکت
 $x = v_x t + x_0$ می باشد یا $\Delta x = v_x t$ که بعداً بیشتر به آن می پردازیم

$$x = v_x t + x_0$$

مکان اولیه زمان سرعت لحظه‌ای

مثال: متحرکی با سرعت $5 \frac{m}{s}$ در خلاف جهت محور x حرکت میکند این متحرک در لحظه $t=0$ از نقطه $x=10m$ می‌گذرد الف: معادله حرکت را بنویسید ب: تعیین کنید که متحرک در چه زمانی به مبدأ مختصات می‌رسد

$$v = -5 \frac{m}{s}$$

$$x = v_x t + x_0$$

$$t=0, x_1=10m \Rightarrow x = (-5)t + 10 \Rightarrow x = -5t + 10$$

مکان اولیه

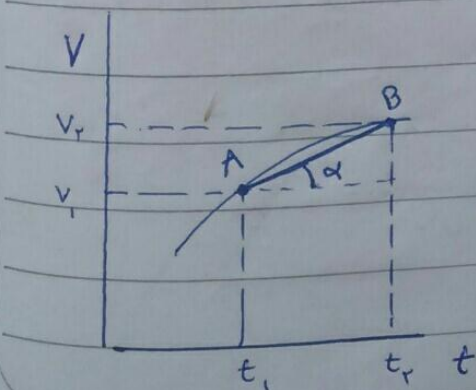
ب: وقتی متحرک به مبدأ مختصات برسد $x=0$ باشد یعنی در معادله

$$x=0$$

$$x = -5t + 10 \Rightarrow -5t + 10 = 0 \Rightarrow -5t = -10 \Rightarrow t = 2s$$

* شتاب متوسط و شتاب لحظه‌ای: می‌دانیم که هنگامی که سرعت متحرک تغییر میکند حرکت را شتاب دار می‌گوئیم در شکل زیر نمودار سرعت زمان یک متحرک نشان داده شده است. در این نمودار سرعت متحرک در زمان t_1

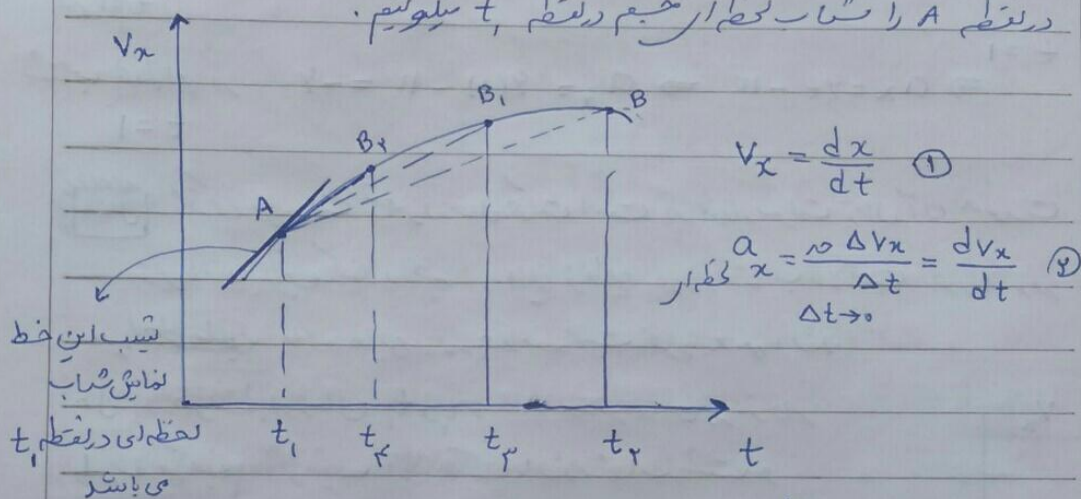
را v_{1x} و در زمان t_2 را v_{2x} می‌نامیم همین می‌دانیم که $\Delta v_x = v_{2x} - v_{1x}$ تغییر سرعت متحرک در بازه زمانی Δt و شیب خط AB در نمودار سرعت زمان است و شتاب متوسط در این بازه زمانی می‌گوئیم.



$$\bar{a}_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1}$$

$$\bar{a}_x = \tan \alpha = \text{شیب خط } AB$$

شیب خطی: در نمودار سرعت زمان شکل زیر هکدامی که Δt بسیار کوچک است
یعنی Δt کوچکتر می شود نقطه B به نقطه A نزدیک تر می شود و در انجام
خط AB در نقطه A بر نمودار سرعت زمان مماس می شود. شیب خطی مماس بر نمودار
در نقطه A را شیب لحظه ای در نقطه t_1 می گویند.



$$(1) و (2) \Rightarrow a_x = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

بنابراین شیب خطی حد شیب متوسط است هکدامی که Δt صفت صفر میل کند.

مثال معادله حرکت جسمی در SI بصورت $x = t^3 - 4t^2 + 9t$ بیان شده

است الف: شیب متوسط آن در لحظه $t=1$ تا $t=2$ ثانیه محاسبه کنید

ب: شیب آن را در لحظه $t=0$ و $t=1$ پیدا نمایید.

$$x = t^3 - 4t^2 + 9t \Rightarrow v_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow v_x = 3t^2 - 8t + 9$$

$$\bar{a}_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \Rightarrow v_{1x} = 3(1)^2 - 8(1) + 9 = 0 \\ t_2 = 2 \Rightarrow v_{2x} = 3(2)^2 - 8(2) + 9 = -3 \end{cases}$$

$$\bar{a}_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1} = \frac{(-3) - (0)}{2 - 1} = \frac{-3 - 0}{2 - 1} = -3$$

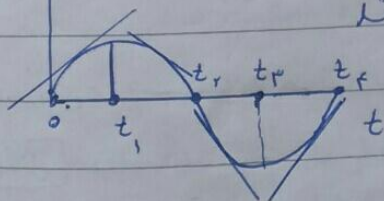
مثبت می گیریم
 د ب ۱ $V_x = 3t^2 - 12t + 9 \Rightarrow a_x = \frac{dV_x}{dt} = 6t - 12$

$t=0 \Rightarrow a_x = 6t - 12 \Rightarrow a_x = 6(0) - 12 = -12$ شتاب لحظه‌ای در $t=0$

$t=1 \Rightarrow a_x = 6t - 12 \Rightarrow a_x = 6(1) - 12 = -6$ شتاب لحظه‌ای در $t=1$

مثال متونی با سرعت متغیر در حال حرکت است اگر نمودار سرعت زمان آن بصورت زیر باشد یعنی کند در حین بازه‌های زمانی بردار شتاب در جهت محور x و در حین بازه‌های در خلاف جهت محور x می باشد.

حل: در هر نقطه از زمان t و t_1 بردار مماس بر نمودار را رسم می کنیم اگر شیب آن مثبت باشد شتاب مثبت و اگر در جهت محور x می باشد اگر شیب آن منفی باشد شتاب منفی و در جهت مخالف محور x می باشد.

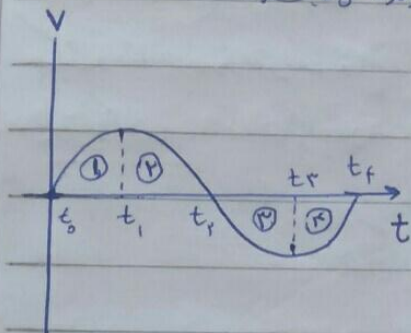


بنابراین در نقطه t_1 شتاب مثبت و در نقطه t_2 شتاب منفی و در نقطه t_3 شتاب مثبت می باشد.

نکته هنگامی که اندازه سرعت یک بزرگ زیاد می شود حرکت را تند شونده و چنانچه اندازه سرعت کاهش یابد حرکت را کند شونده می نامیم.

نکته اگر حاصلضرب av بزرگتر از صفر باشد حرکت را تند شونده و اگر av کوچکتر از صفر باشد حرکت را کند شونده می باشد.

مثال: در شکل زیر علامت شتاب و سرعت را مشخص کنید و بگویید کدام فاصله حرکت کند شونده و در کدام فاصله حرکت کند شونده می باشد.



ناحیه ۱ $t_1 \text{ تا } t_0$ $\begin{cases} v > 0 \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow$ تند شونده $av > 0$

ناحیه ۲ $t_2 \text{ تا } t_1$ $\begin{cases} v > 0 \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow$ کند شونده $av < 0$

ناحیه ۳ $t_3 \text{ تا } t_2$ $\begin{cases} v < 0 \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow$ تند شونده $av > 0$

ناحیه ۴ $t_4 \text{ تا } t_3$ $\begin{cases} v < 0 \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow$ کند شونده $av < 0$

نکته مهم: برای حل مسائل سرعت روابط زیر برقرار است (حرکت شتابدار با شتاب ثابت)

معادله حرکت $x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$

معادله سرعت زمان $v = at + v_0$

معادله مستقل از زمان $v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$

x مکان

x_0 مکان اولیه

v_0 سرعت اولیه

a شتاب حرکت

v سرعت ثانویه

Δx جابه جایی

معادله مکان زمان $x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$

معادله سرعت زمان $v = at + v_0$

معادله مستقل از زمان $v^2 - v_0^2 = 2a \Delta x$

مثال: خودرویی با سرعت $10 \frac{m}{s}$ در حال حرکت می باشد راننده ترمز می کند و سرعت خودرو ~~به سرعت~~ شتاب $2 \frac{m}{s^2}$ کاهش می یابد الف: چه زمانی طول می کشد تا خودرو متوقف شود (ب) در این بازه زمانی خودرو چه مسافتی را طی می کند.

سرعت اولیه

$$\begin{cases} v_0 = 10 \frac{m}{s} \\ a = -2 \frac{m}{s^2} \end{cases}$$

حل الف

چون گفته خودرو متوقف می شود

$$v = 0$$

جایگذاری

معادله سرعت

$$v = at + v_0 \Rightarrow 0 = (-2)t + 10 \Rightarrow$$

$$0 = -2t + 10 \Rightarrow 2t = 10 \Rightarrow t = 5s$$

ب

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \Rightarrow$$

$$x - x_0 = \frac{1}{2}at^2 + v_0t \Rightarrow$$

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t \Rightarrow$$

$$\Delta x = \frac{1}{2}(-2)(5)^2 + 10(5) \Rightarrow$$

$$\Delta x = -25 + 50 = 25 \Rightarrow \boxed{\Delta x = 25}$$

جواب

* سقوط آزاد: یک نوع حرکت یک بعدی با شتاب ثابت در راستای قائم می باشد.
 شتاب این حرکت برای همه اجسام یکسان و در نزدیکی سطح زمین برابر 9.8 m/s^2 بر مجذور ثانیه می باشد. در سقوط آزاد جابه جایی به سمت پایین است و راستای قائم می باشد معادلات حرکت در شتاب ثابت برای سقوط آزاد نیز صادق است کافی است در این معادلات a را به $-g$ تبدیل کنیم و جای $-g = -9.8$ قرار دهیم در برخی مسائل $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ می گیریم.

سقوط آزاد		حرکت شتاب ثابت
معادله سرعت		معادله سرعت
$v = -gt + v_0$	$\Leftrightarrow$	$v = at + v_0$

مکان		مکان
معادله مکان		معادله مکان
$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0$	$\Leftrightarrow$	$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$

معادله مستقل از زمان		معادله مستقل از زمان
$v^2 - v_0^2 = -2g(y - y_0)$	$\Leftrightarrow$	$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$

یا

$v^2 - v_0^2 = -2g\Delta y$	$\Leftrightarrow$	$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x$
-----------------------------	-------------------	----------------------------

در این روابط جهت مثبت بالا مثبت و جهت پایین را منفی در نظر می گیریم
 در شتاب همواره برابر $g = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ یا $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ در نظر می گیریم

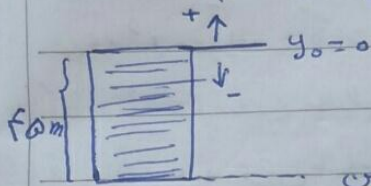


مثال یک: سنگی از بالای مسافتی به ارتفاع m رها می‌شود.

الف: سنگ پس از چه زمانی به سطح زمین می‌رسد؟

ب: سرعت آن هنگام رسیدن به زمین چقدر می‌باشد؟

حل: بالای مسافتان را مبدأ ارتفاع می‌گیریم



سطح زمین $y = -45$

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ y = -45 \\ v_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0$$

$$\Rightarrow -45 = -\frac{1}{2}(10)(t^2) + (0)(t) + 0$$

$$\Rightarrow -45 = -5t^2 \Rightarrow t^2 = 9 \Rightarrow t = 3s$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } \begin{cases} v_0 = 0 \\ v = ? \\ t = 3s \end{cases} & \Rightarrow v = -gt + v_0 \\ & \Rightarrow v = -(10)(3) + (0) \\ & \Rightarrow v = -30 \text{ m/s} \end{aligned}$$

چون جهت سرعت نسبت به این می‌باشد بنابراین سرعت منفی نیست آمده است.



مثال: سنگی با سرعت $۲۰ \frac{m}{s}$ در راستای قائم به طرف بالا پرتاب می‌شود.

الف: چه زمانی طول میکشد تا سنگ به بالاترین ارتفاع برسد؟

ب: سنگ تا چه ارتفاعی بالا میرود؟

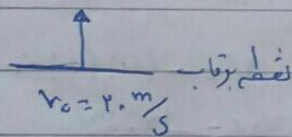
ج: چه زمانی طول میکشد تا سنگ به نقطه پرتاب برگردد؟

د: سرعت سنگ در لحظه برگشت در نقطه پرتاب چقدر میباشد؟

حل: محور y را رو به بالا و مبدأ را نقطه پرتاب در نظر میگیریم بنا بر این در

لحظه پرتاب سنگ داریم $v_0 = ۲۰ \frac{m}{s}$ و $v = ۰$ چون سنگ پس از بالا رفتن

متوقف میشود و $y = ۰$ چون مبدأ نقطه پرتاب است و مکان اولیه صفر است



$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = -gt + v_0 & (2) \end{cases}$$

$$\text{رابطه (۲)} \Rightarrow v = -gt + v_0 \Rightarrow 0 = -(10)t + 20 \Rightarrow$$

$$\text{الف)) } 0 = -10t + 20 \Rightarrow \boxed{t = 2}$$

$$\text{ب)) } y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0$$

$$(t=2) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}(10)(2)^2 + 20(2) + 0$$

$$y = (-5)(4) + 40$$

$$y = -20 + 40 = 20 \quad \boxed{y = 20} \text{ متر}$$

$$\text{ج)) بازگشت به نقطه پرتاب پس } y = 0 \text{ و } y_0 = 0$$

$$\text{د)) } y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0$$

$$0 = -\frac{1}{2}(10)(t)^2 + (20)t + 0 \Rightarrow$$

$$0 = -\frac{1}{2}(10)t^2 + 20t \Rightarrow$$

$$0 = -5t^2 + 20t \Rightarrow -5t^2 + 20t = 0 \Rightarrow$$

$$t(-5t + 20) = 0 \Rightarrow \boxed{t=0} \text{ یا } (-5t + 20) = 0$$

$$\Rightarrow -5t + 20 = 0 \Rightarrow -5t = -20 \Rightarrow \boxed{t=4s}$$

$$\begin{matrix} t=4s \\ t=0 \end{matrix}$$

لحظه $t=0$ مربوط به لحظه پرتاب است و لحظه $t=4$ مربوط به زمانی است که طول مکسید که پس از پرتاب دوباره سنگ به نقطه پرتاب برگردد.

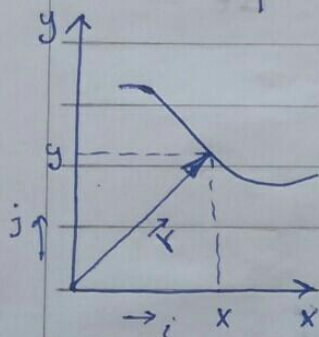
$$د) \quad v = -gt + v_0$$

$$\textcircled{t=4} \quad v = -(10)(4) + v_0 \Rightarrow v = -(10)(4) + 20$$

$$\textcircled{v_0=20} \Rightarrow v = -20 \text{ m/s}$$

علامت منفی بیان دهنده بارش چو جهت سنگ در هنگام برگشت به نقطه پرتاب جهت پائین می باشد و منفی می باشد.

حرکت در دو بعد: حرکت در یک بعد را مرور کردیم اکنون به بررسی حرکت در صفحه که آن را حرکت دوفعده می نامیم می پردازیم و بصورت مختصر توضیح میدهیم در شکل زیر مسیر حرکت جسمی در صفحه مختصات نشان داده شده است مکان جسم را با بردار $\vec{r}$ غرض می دهیم این بردار بصورت زیر می نویسیم. چون در هر لحظه بردار مکان تغییر می کند پس باید مولفه های x و y را در رابطه بالا بصورت تابعی از زمان داشته باشیم



بردار مکان دوفعده $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$

$x = f(t)$

$y = g(t)$

لغده x

لغده y

رابطه های $x = f(t)$ و $y = g(t)$ را معادلات

حرکت در دوفعه می گوئیم اگر در رابطه $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ بجای x و y مقادیرشان را قرار میدهیم یعنی داریم

$\vec{r} = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j}$

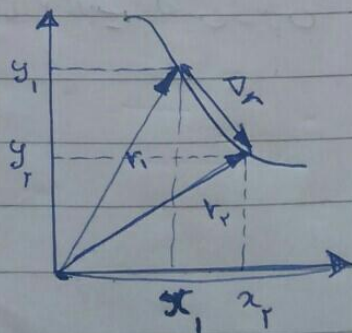
حاجب هایی در حرکت دوفعده: سرعت متوسط در حرکت دوفعده:

برابر دو بردار $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ داریم

$\vec{r}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$

$\vec{r}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$

$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$



ادامه است

$$\begin{aligned}\vec{\Delta r} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j}) - (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}) \\ &= (x_2 \vec{i} - x_1 \vec{i}) + (y_2 \vec{j} - y_1 \vec{j}) \\ &= \Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{\Delta r} = \Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j} \quad \text{جابجایی در حرکت یکنواختی}$$

$$\vec{v} = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j}}{\Delta t} = \frac{\Delta x \vec{i}}{\Delta t} + \frac{\Delta y \vec{j}}{\Delta t}$$

سرعت متوسط

$$\Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_x \vec{i} + \vec{v}_y \vec{j}$$

سرعت

$$\Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_x \vec{i} + \vec{v}_y \vec{j}$$

مثال معادله حرکت جسمی در دو بعد بصورت زیر می باشد

$$x = 2t$$

$$y = -t^2 + 4t$$

الف: بردارهای مکان جسم را در لحظه $t_1 = 1s$ و $t_2 = 2s$ بدست آورید
 ب: سرعت متوسط آن را در بازه زمانی ۱ تا ۲ ثانیه تعیین و سپس
 بزرگی سرعت متوسط را محاسبه کنید.

حل (الف) $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$

$$t = 1 \text{ s} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t \Rightarrow x = 2(1) = 2 \\ y = -t^2 + 4t \Rightarrow y = -1 + 4 = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} \Rightarrow \boxed{\vec{r}_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j}}$$

$$t = 2 \text{ s} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t \Rightarrow x = 2(2) = 4 \\ y = -t^2 + 4t \Rightarrow y = -4 + 8 = 4 \end{cases}$$

$$\vec{r}_2 = x\vec{i} + y\vec{j} \Rightarrow \boxed{\vec{r}_2 = 4\vec{i} + 4\vec{j}}$$

$$\vec{\Delta v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{(4\vec{i} + 4\vec{j}) - (2\vec{i} + 3\vec{j})}{2 - 1}$$

$$\vec{\Delta v} = \frac{2\vec{i} + \vec{j}}{1} = 2\vec{i} + \vec{j} \quad \text{بردار سرعت متوسط}$$

$$\vec{\Delta v} = 2\vec{i} + \vec{j} \Rightarrow \underset{\text{اندازه}}{\Delta v} = \sqrt{(2)^2 + (1)^2} = \sqrt{5} \text{ m/s} \quad \text{اندازه سرعت متوسط}$$

سرعت لحظه‌ای در حرکت دورانی: طبق تعریف سرعت لحظه‌ای داریم

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}$$

سرعت متوسط سرعت لحظه‌ای

بنابراین می‌توان گفت که سرعت لحظه‌ای برابر است با مشتق بردار مکان
مجموع نسبت به جملات زمان. بنابراین داریم

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (۷) \quad (۱) \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

سرعت لحظه‌ای

$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} (x\vec{i} + y\vec{j})$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$$

$$V = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

اندازه سرعت
لحظه‌ای

* * *

مثال: متحرکی در صفحه xy حرکت می‌کند معادله‌های حرکت آن بصورت
 $y = 4t^2$ و $x = 4t + 5$ می‌باشد بزرگ‌ترین سرعت متحرک را در لحظه
 $t = 1.5$ بدست آورید

حل: $\begin{cases} x = 4t + 5 \Rightarrow v_x = 4 \text{ m/s} \\ y = 4t^2 \Rightarrow v_y = 8t \end{cases}$

$\Rightarrow t = 1.5 \Rightarrow \begin{cases} v_x = 4 \text{ m/s} \\ v_y = 8(1.5) = 12 \text{ m/s} \Rightarrow v_y = 12 \text{ m/s} \end{cases}$

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(4)^2 + (12)^2} = \sqrt{160} = 12.65 \text{ m/s}$
 اندازه سرعت
 متحرک

* شتاب متوسط و شتاب لحظه‌ای در حرکت دوتایی:
 وقتی سرعت جسم در حال حرکت تغییر می‌کند حرکت را شتابدار می‌گوئیم این
 تغییر سرعت ممکن است به دلیل تغییر اندازه سرعت یا تغییر جهت و یا هر دو
 آنها باشد قبلاً در حرکت یک بعدی گفتیم که شتاب برابر است با تغییرات سرعت
 در بازه زمانی Δt می‌داریم

سرعت در دو نقطه $\vec{V} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$
 $\vec{a} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{\vec{V}_2 - \vec{V}_1}{t_2 - t_1}$

کفایتاً $\vec{a} = \frac{\vec{V}_2 - \vec{V}_1}{t_2 - t_1} = \frac{(v_{2x} \vec{i} + v_{2y} \vec{j}) - (v_{1x} \vec{i} + v_{1y} \vec{j})}{t_2 - t_1}$

$\vec{a} = \left(\frac{\Delta v_x}{\Delta t}\right) \vec{i} + \left(\frac{\Delta v_y}{\Delta t}\right) \vec{j} \Rightarrow \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$
 شتاب متوسط

و بنابراین بردار شتاب لحظه‌ای داریم:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

شماره نظر

و به همین مناسبت مشتق داریم

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

نظر

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \text{ چون}$$

پس داریم

$$\vec{a} = \left(\frac{dv_x}{dt} \right) \vec{i} + \left(\frac{dv_y}{dt} \right) \vec{j}$$

نظر

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$$

مثال معادله حرکت دو بعدی متحرک در سیستم SI بصورت
 $\begin{cases} x = 20 + t^2 \\ y = -5t^2 \end{cases}$ می باشد. بردار سرعت - بردار شتاب - این متحرک را در لحظه $t = 1s$ بدست آورید

$$x = 20 + t^2 \Rightarrow v_x = \frac{dx}{dt} = 2t \Rightarrow v_x = 2 \cdot 1 = 2 \text{ m/s}$$

$$y = -5t^2 \Rightarrow v_y = \frac{dy}{dt} = -10t \Rightarrow v_y = -10 \cdot 1 = -10 \text{ m/s}$$

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} = 2\vec{i} - 10\vec{j} \Rightarrow \vec{v} = 2\vec{i} - 10\vec{j}$$

بردار سرعت

$$\boxed{\vec{v} = 2\vec{i} - 10\vec{j}}$$

برای تعیین بردارهای شتاب از بردارهای سرعت مشتق بگیریم

$$\begin{cases} v_x = 4t \Rightarrow a_x = \frac{dv_x}{dt} = 4 \frac{m}{s^2} \\ v_y = -10t^2 \Rightarrow a_y = \frac{dv_y}{dt} = -20t = -20(1) = -20 \frac{m}{s^2} \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{a} = 4\vec{i} - 20\vec{j}} \quad \text{بردار شتاب}$$

مثال) معادله حرکت جسم در SI بر رابطه های

$$\begin{cases} x = 4t \\ y = 2t^2 + 1 \end{cases}$$

داده شده است

الف) معادله سرعت جسم را بنویسید و بزرگی سرعت را در $t=2$ بیابید
 ب) معادله مسیر حرکت را بنویسید و جهت بردار سرعت متوالی
 جسم را بین لحظات $t=1$ و $t=2$ بیابید و جهت بردارهای $\vec{v}$ و $\vec{a}$ را بیابید
 ب) و اندازه سرعت متوالی را بیابید

$$v_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \boxed{v_x = 4}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} \Rightarrow y = 2t^2 + 1 \Rightarrow v_y = 4t \Rightarrow v_y = 4(2) = 8 \frac{m}{s}$$

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} \Rightarrow \vec{v} = 4\vec{i} + 8\vec{j}$$

$$v = \sqrt{(4)^2 + (8)^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 8.94 \frac{m}{s}$$

ب) $\begin{cases} x = 4t \\ y = 2t^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4t \Rightarrow t = \frac{x}{4} \\ y = 2t^2 + 1 \Rightarrow y = 2\left(\frac{x}{4}\right)^2 + 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{x^2}{16} + 1}$$

ج. برای محاسبه بردار سرعت متوسط از روابط زیر استفاده می‌کنیم

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} \quad (1)$$

الکتون بردارهای $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ را حساب می‌کنیم

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\begin{cases} x = 4t \\ y = 2t^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \vec{r} = (4t)\vec{i} + (2t^2 + 1)\vec{j}$$

$$\begin{cases} t_1 = 1 \Rightarrow \vec{r}_1 = (4(1))\vec{i} + (2(1)^2 + 1)\vec{j} = 4\vec{i} + 3\vec{j} \quad (2) \\ t_2 = 2 \Rightarrow \vec{r}_2 = (4(2))\vec{i} + (2(2)^2 + 1)\vec{j} = 8\vec{i} + 9\vec{j} \quad (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_1 = 1 \Rightarrow \vec{r}_1 = (4(1))\vec{i} + (2(1)^2 + 1)\vec{j} = 4\vec{i} + 3\vec{j} \quad (2) \\ t_2 = 2 \Rightarrow \vec{r}_2 = (4(2))\vec{i} + (2(2)^2 + 1)\vec{j} = 8\vec{i} + 9\vec{j} \quad (3) \end{cases}$$

روابط یک و دو و (۳) را در روابط (۱) قرار می‌دهیم

$$\vec{v} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\Delta t} = \frac{(8\vec{i} + 9\vec{j}) - (4\vec{i} + 3\vec{j})}{2 - 1} = 4\vec{i} + 6\vec{j}$$

$$= 4\vec{i} + 6\vec{j} \Rightarrow \boxed{\vec{v} = 4\vec{i} + 6\vec{j}} \quad \text{بردار سرعت متوسط}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(4)^2 + (6)^2} = \sqrt{52}$$

اندازه سرعت متوسط

نیروی دهم کشتی بین دو جسم و نتیجه تأثیر متقابل دو جسم بر یکدیگر است که باعث تغییر وضعیت حرکت و یا تغییر شکل اجسام می‌شود پس برای آنکه نیرو وجود داشته و خود دو جسم لازم است.

* نیرو یک کمیت برداری است یعنی هم دارای اندازه و هم دارای جهت می‌باشد و از قاعده جمع برداری پیروی می‌کند.

* قوانین نیوتن
* قانون اول نیوتن: اگر جسم در حالت سکون یا در حال حرکت یکنواخت بر روی خط راست باشد حالت خود را حفظ می‌کند مگر آنکه نیرو یا نیروهای دیگری باعث آن تغییر حالت شوند.

* نکته: طبق قانون اول نیوتن براسند نیروهای وارد بر جسم صفر است. یعنی جسم کلاً در حال حرکت یکنواخت پس آنجا تعدادی وجود ندارد.

* نکته: تا قبل از اجسام برای حفظ حالت اولیه خود (وضعیت سکون یا حرکت) را حفظ می‌کنند یا مقادیری که جسم در مقابل تغییر وضع حرکت از خودشان شال می‌دهند، هر چه جسم ستر باشد یعنی آن ستر است. بنابراین برای تغییر وضعیت حرکت با سکون آن نیروی بیشتری لازم است.

* قانون دوم نیوتن: اگر جسمی به جرم m نیرو وارد شود آن جسم شتاب می‌گیرد که معادل (a) و که با اندازه نیروی وارد شده بر جسم رابطه مستقیم و با جرم جسم نسبت وارون دارد که آن را با رابطه زیر نشان می‌دهیم.

$$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m} \quad \sum \vec{F} = m \vec{a}$$

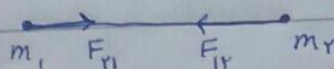
نیرو
جهت جسم
شتاب

تکانه: نیرو و شتاب همواره هم راستا و هم جهت می باشند زیرا جرم m کمیتی اسکالر و مثبت می باشد و همچنین عامل ایجاد شتاب نیرو می باشد که کمیتی بردار است

تعریف قانون دوم نیوتن: نیروی براننده وارد بر جرم برابر است با حاصل ضرب جرم جرم در شتاب آن

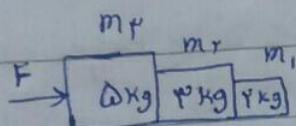
$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \quad یا \quad \vec{F} = m\vec{a}$$

قانون سوم نیوتن: هرگاه جرمی بر جرم دیگر نیرو وارد کند جرم دوم هم بر جرم اول نیروی هم اندازه و هم راستا و در خلاف سوی آن وارد می کند



مثال: در شکل زیر $m_1 = 2\text{ kg}$ و $m_2 = 5\text{ kg}$ و $m_3 = 3\text{ kg}$ می باشد

اگر از نیروی اسکالر صرف نظر کنیم نیروی را که جرم m_1 بر جرم m_2 وارد می کند را می بینیم که $(F = 20\text{ N})$



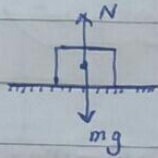
$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow$$

$$F_0 = (m_1 + m_2 + m_3)\vec{a}$$

$$\Rightarrow F_0 = (10)\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\vec{F}_{12} = m_1\vec{a} \Rightarrow F_{12} = (2)(2) = 4\text{ N}$$

فیزیکی عمودی تکلیف g : نیرویی که از طرف تکلیف g به طور عمودی بر جسم وارد می‌شود و آن را با N نشان می‌دهیم

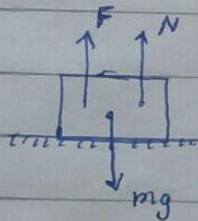


جسم در سطح افقی قرار دارد نسبت به بالا را مثبت و نسبت به پایین را منفی در نظر می‌گیریم

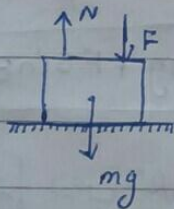
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - mg = 0$$

چون جسم ثابت است

مثال جسمی که در سطح افقی قرار دارد نیرویی رو به بالا F وارد می‌شود ولی جسم همچنان روی سطح افقی قرار دارد نیروی عمودی تکلیف g را می‌پسند



$$N + F - mg = 0 \Rightarrow \boxed{N = mg - F}$$

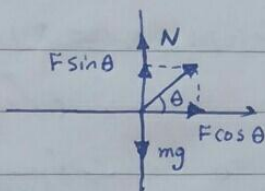
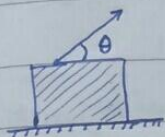


اگر جهت F نسبت به پایین باشد داریم

$$mg + F = N$$

$$\boxed{N = mg + F}$$

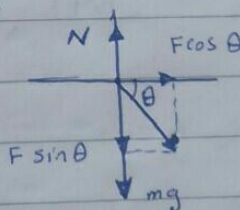
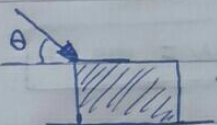
مثال: جسم مقابل نیروی F که با افق زاویه θ می سازد بر جسم وارد می شود. نیروی عمودی سطح را می بیند.



$$N + F \sin \theta - mg = 0$$

$$N = mg - F \sin \theta$$

مثال در شکل مقابل نیروی عمودی سطح را می بیند.

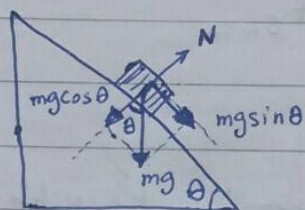
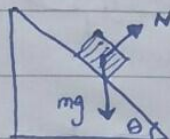


$$N - mg - F \sin \theta = 0$$

$$\Rightarrow N = mg + F \sin \theta$$

$$N = mg + F \sin \theta$$

نکته: در این مثال ها ما فقط نیروی F را که با افق زاویه θ می سازد را به دو مولفه تجزیه کرده ایم که قبلاً در بحث تجزیه بردارها بیان کردیم.



$$N = mg \cos \theta$$

* نیروی اصطکاک: هرگاه جسمی بر روی سطحی قرار گیرد و در آن جهت حرکت قرار گیرد، نیروی اصطکاک در جهت مخالف حرکت ظاهر می شود. این نیروی اصطکاک را F_s می نامند. این نیروی اصطکاک در جهت مخالف حرکت ظاهر می شود. این نیروی اصطکاک را F_s می نامند. این نیروی اصطکاک را F_s می نامند.

$$\Sigma F = ma \rightarrow a = 0$$

$$F - F_S = 0 \Rightarrow F = F_S$$

$$0 \leq F_s \leq F_{smax}$$

شروی اصطلاح استیجی

در آستانه حرکت

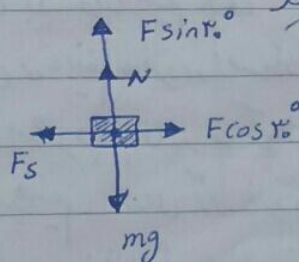
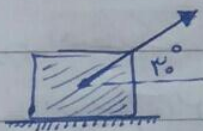
$F_{s_{max}} = \mu_s N \rightarrow \mu_s$ ضریب اصطکاک استاتیکی

مثال: جسمی به جرم 5 kg بر روی سطح افقی با ضریب اصطکاک استاتیکی $\mu_s = 0.2$ قرار دارد. مقدار نیرویی که میتواند جسم را در آستانه حرکت قرار دهد را می بیند.

$$F_s = \mu_s N \Rightarrow F_s = (0.2)(50) \Rightarrow F_s = 10\text{ N}$$

$$0 \leq F_s \leq F_{s\max}$$

مثال: مطابق شکل زیر جسمی به جرم 5 kg روی سطح افقی قرار دارد. اگر ضریب اصطکاک استاتیکی جسم و سطح برابر باشد نیروی اصطکاک در این حالت را می بیند.



$$N + F \sin 30^\circ = mg$$

$$N = mg - F \sin 30^\circ = 50 - (10)\left(\frac{1}{2}\right) = 50 - 5 = 45\text{ N}$$

$$F_s = \mu_s N \Rightarrow F_s = (0.2)(45) = 9\text{ N}$$

$$F_s = 9\text{ N} \quad F \cos 30^\circ = F \frac{\sqrt{3}}{2} = (10)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 8.66$$

چون $F \cos 30^\circ$ کمتر از نیروی اصطکاک F_s می باشد بنابراین هم حرکت نمی کند.

نیروی اصطکاک جنبشی: اگر دو جسم نسبت به یکدیگر در حال حرکت باشند نیروی اصطکاک در آن حالت را جنبشی می نامند و با F_K نشان می دهیم نیروی اصطکاک جنبشی از رابطه زیر می شود.

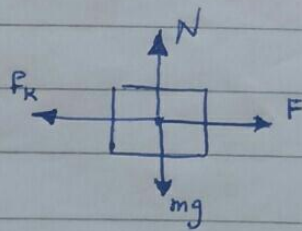
$$F_K = \mu_K N$$

نیروی اصطکاک جنبشی
نیروی اصطکاک جنبشی
نیروی اصطکاک جنبشی

جهت نیروی اصطکاک جنبشی جهت
همواره در جهت مخالف جهت حرکت
همین برار μ_K و μ_S داریم

$$\mu_K < \mu_S$$

* نکته: برای حل مسائل اصطکاک جنبشی از قانون دوم نیوتن استفاده می کنیم.



$$\sum F_x = ma$$

$$F - F_K = ma \Rightarrow F = ma + F_K$$

$$\sum F_y = 0$$

حرکت در راستای y نداریم

$$\Rightarrow N - mg = 0 \Rightarrow$$

$$N = mg$$