



بسیاری از پدیده های اطراف ما به نوعی با هم ارتباط دارند و به مثال های زیر توجه کنید:

- (1) نمره درس جغرافیای شما از مدت زمانی که مطالعه می کنید تبعیت می کند.
 - (2) ترمیم یک زخم روی بدن شما، تابعی از تکثیر سلول در بدن شما می باشد.
 - (3) درآمد یک راننده تاکسی، تابعی از مدت زمانی است که برای کار کردن وقت می گذارد.
- در مثال های بالا یک رابطه یا وابستگی بین دو کمیت وجود دارد.

• به جدول های زیر دقت کنید :

ساعت	8	9	10	11	12
دما	15	16	17	17	18

به یک ساعت معین فقط یک

دما را می توان نسبت داد ، یعنی

یک ساعت مشخص دو دمای متفاوت ندارد.

کالا	خودکار	دفتر	مداد	خط کش
قیمت	1500	3000	1000	1500

به هر جسم معین

.....

(تومان)

.....

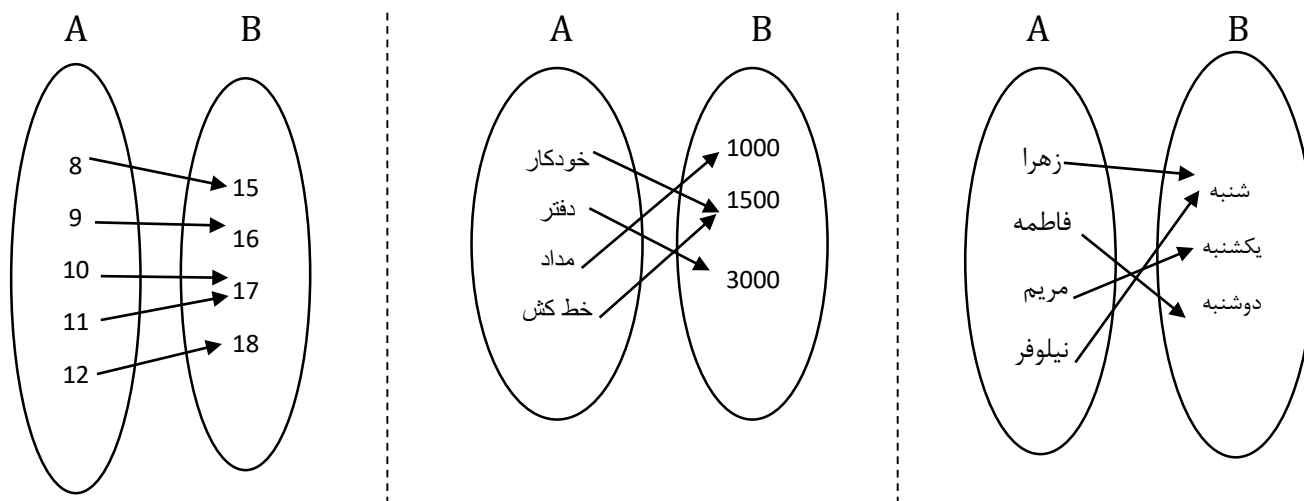
فرد	زهره	مریم	فاطمه	نیلوفر
روز تولد	شنبه	یکشنبه	دوشنبه	شنبه

.....

.....

جدول های بالا را به کمک مجموعه ها و پیکان هایی که اعضای آن ها را با هم مربوط

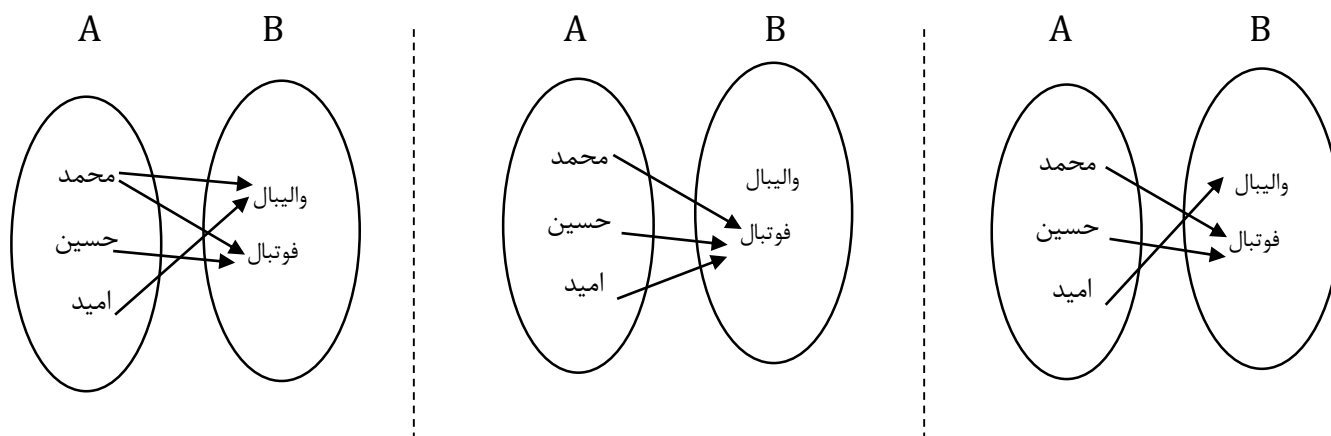
می کنند، مشخص می کنیم.



در رابطه های قبل، از هر عضو A دقیقاً یک پیکان خارج شده است و این گونه رابطه بین دو مجموعه را یک تابع می نامند.

- یک تابع از مجموعه A به مجموعه B رابطه ای بین دو مجموعه است که در آن به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از B نسبت داده می شود.

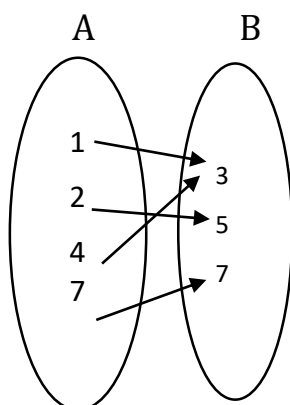
🕒 **تمرین 5-1:** کدام یک از نمودارهای پیکانی زیر معرف یک تابع است و کدام یک نیست ؟



🕒 **تمرین 5-2:** مشخص کنید کدام یک از رابطه های زیر تابع است ؟

- (1) رابطه ای که به افراد سن آن ها را نسبت می دهد.
- (2) رابطه ای که به افراد وزن آن ها را نسبت می دهد.
- (3) رابطه ای که به افراد غذای مورد علاقه آن ها را نسبت می دهد.
- (4) رابطه ای که به ضلع یک مربع محیط مربع را نسبت می دهد.
- (5) رابطه ای که به هر فرد گروه خونی او را نسبت می دهد.
- (6) رابطه ای که به هر دانش آموز دوستان او را نسبت می دهد.
- (7) رابطه ای که به هر عدد مجذور آن را نسبت می دهد.
- (8) رابطه ای که به هر عدد ریشه های دوم آن را نسبت می دهد.
- (9) رابطه ای که به هر عدد ریشه سوم آن را نسبت می دهد.

○ **نمایش تابع به صورت زوج های مرتب :**



به نمودار پیکانی مقابل توجه کنید.

همانطور که می دانید چون از هر عضو A دقیقاً

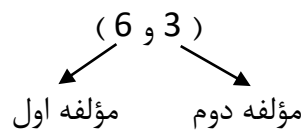
یک پیکان خارج شده است بنابراین تابع است.

حالا این رابطه را به صورت زوج های مرتب نشان دهید.

$$R = \{(1, 3) \text{ و } (2, 5) \text{ و } (4, 5) \text{ و } (7, 7)\}$$

* اگر یک رابطه به صورت مجموعه زوج های مرتب داده شده باشد، هنگامی این رابطه تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن _____.

ترتیب نوشتن اعداد در هر زوج مرتب مهم استو مثلاً زوج های (4 و 5) و (5 و 4) برابر نیست و دو نقطه متفاوت را در نمودار نشان می دهد و در هر زوج مرتب، عضو اول را مؤلفه اول و عضو دوم را مؤلفه دوم می نامیم.



نکته 1: دو زوج مرتب $(a و b)$ و $(c و d)$ وقتی با هم برابرند که مؤلفه اول آن ها با هم و مؤلفه دوم آن ها نیز با هم برابر باشند.

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ و } b = d$$

تمرین 3-5: x و y را طوری تعیین کنید که دو زوج مرتب $(x + y, 4)$ و $(x - 6, 3)$ با هم برابر باشند؟

تمرین 4-5: اگر دو زوج مرتب $(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}, \frac{5}{x} - \frac{7}{y})$ و $(-3, -1)$ با هم برابر باشند، حاصل $\frac{y}{x}$ کدام است؟

1 (1) 2 (2) -2 (3) -1 (4)

⌚ **تمرین 5-5:** کدام یک از روابط زیر تابع است؟

$$R_1 = \{(2,3) \text{ و } (4,1) \text{ و } (2,7)\}$$

$$R_2 = \{(1,2) \text{ و } (-1,2) \text{ و } (3,2)\}$$

$$R_3 = \{(1, \sqrt{2} + 1) \text{ و } (2,5) \text{ و } (1, \frac{1}{\sqrt{2} - 1})\}$$

⌚ **تمرین 6-5:** اگر رابطه $f = \{(1,b) \text{ و } (3,5) \text{ و } (a+2,3) \text{ و } (3,a^2+4)\}$

تابع باشد، ab کدام است؟

(1) 2

(2) -2

(3) -3

(4) 3

○ **نمایش مختصاتی تابع:**

(1) آیا $R = \{(1,4)(2,5)(3,3)\}$ می تواند یک تابع باشد؟ چرا؟

(2) این نقاط را در دستگاه مختصات رسم کنید و نتیجه بگیرید که یک تابع از لحاظ نموداری

به چه صورت است؟

نکته 2: از لحاظ نموداری، یک نمودار در صورتی می تواند نمودار یک تابع باشد که هر خطی به موازات محور y ها رسم کنیم نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

تمرین 5-7: در هر سطر نمایش های مختلف یک رابطه را نشان دهید و معلوم کنید که آیا

این رابط تابع است ؟

جدول یا نمودار	نمودار پیکانی	زوج مرتب	توصیف رابطه
			به هر عدد طبیعی کمتر از 4 مقسوم علیه های آن را نسبت می دهد.
		$\{(2, 4)(3, 9)(4, 16)\}$	
			به اعداد 4 و 7 ریشه های دوم آن را نسبت می دهد.

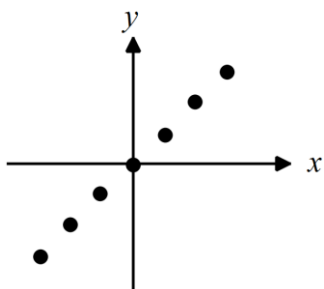
تمرین 5-8: مجموعه های $A = \{a, b, c\}$ و $B = \{1, 2\}$ داده شده اند.

الف) به کمک نمودار پیکانی دو رابطه از A به B ارائه دهید که تابع باشند.

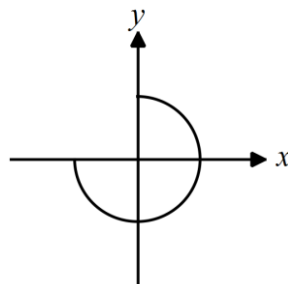
ب) دو رابطه ارائه دهید که تابع نباشد.

🕒 **تمرین 5-9:** کدام یک از رابطه های زیر تابع هستند؟

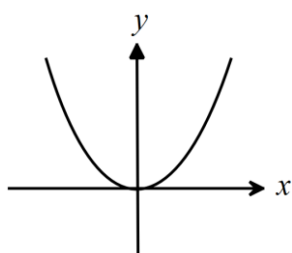
الف)



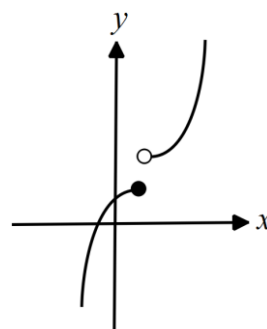
ب)



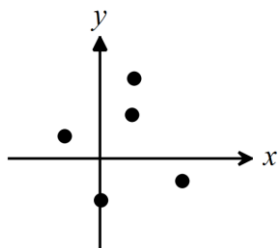
ج)



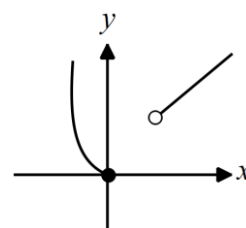
د)



و)



ی)



🕒 **تمرین 5-10:** کدام یک از رابطه های زیر تابع هستند؟

$$f = \{(1, 5) \text{ و } (-3, 4) \text{ و } (3, -3) \text{ و } (-3, 3)\}$$

$$f = \{(-2, \frac{1}{2}) (-\frac{1}{3}, 3) (-2, 0/5)\}$$

🕒 **تمرین 5-11:** تابع $f = \{(2, 5) \text{ و } (-1, 1) \text{ و } (5, -1)\}$ را در نظر بگیرید و

مقادیر زیر را بدست آورید.

الف) $f(2) =$

ب) $f(f(2)) =$

ج) $f(f(f(2))) =$

🕒 **تمرین 5-12:** مقادیر x و y را چنان بیابید که رابطه زیر تابع باشد.

$$f = \{(2, 1) \text{ و } (1, x + 2y) \text{ و } (1, -4) \text{ و } (2, 2x - y)\}$$

🕒 **تمرین 5-13:** کدام یک از روابط زیر تابع است ؟

الف) رابطه ای که به هر دانش آموز، کتاب های درسی او را نسبت می دهد.

ب) رابطه ای که به هر شخص ، فشار خون او را نسبت می دهد.

ج) به هر عددی ریشه های دوم آن را نسبت می دهد.

د) رابطه ای که به هر فرد مسلمان قبله او را نسبت دهد.

ه) رابطه ای که به هر شهر سوغاتی ها را نسبت دهد.

○ دامنه و برد تابع :

(1) در جدول زیر رابطه بین تعدادی چند ضلعی و مجموع زوایای داخلی آن ها داده شده است، جدول را کامل کنید.

پنج ضلعی	لوزی	مربع	مثلث	چند ضلعی
			180°	مجموع زوایای داخلی (درجه)

این رابطه را به صورت زوج مرتب بنویسید. آیا تابع است؟ چرا؟

نکته 3:



- مجموعه همه مولفه های اول زوج مرتب تشکیل دهنده هر تابع دامنه است.
- مجموعه همه مولفه های دوم زوج مرتب را که با مولفه های اول در ارتباطند، برد تابع می گویند.

(2) در جدول زیر رابطه بین ضلع یک مربع و محیط آن داده شده است و جدول را کامل کنید.

طول ضلع	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	4	
محیط	2	4				20

الف) نمایش رابطه داده شده را به صورت مجموعه زوج های مرتب بنویسید و چرا این رابطه تابع است؟

ب) دامنه و برد این تابع را بنویسید.

(3) الف) تابعی مثال بزنید که دامنه آن 3 عضو و برد آن دو عضو داشته باشد.

ب) آیا تابعی وجود دارد که دامنه آن دو عضو و برد آن 3 عضو داشته باشد؟

(4) اگر تابعی از مجموعه A به مجموعه B باشد، می دانیم که دامنه f همان مجموعه A

است، آیا همیشه برد تابع f با مجموعه B برابر است؟ مثال بزنید.

(5) تابعی مثال بزنید که :

الف) دامنه و برد آن 3 عضو باشد.

ب) دامنه آن 4 عضو و برد آن 2 عضو داشته باشد.

ج) برد آن فقط یک عضو داشته باشد.

د) دامنه آن فقط یک عضو داشته باشد.

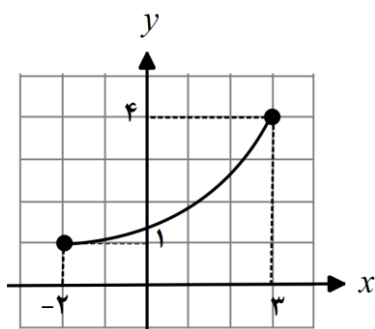
ه) دامنه آن نامتناهی و برد آن متناهی باشد.

ی) دامنه و برد آن نامتناهی باشد.

(6) آیا تابعی وجود دارد که تعداد عضوهای برد آن از تعداد عضوهای دامنه بیشتر باشد؟ مثلاً

آیا می توان تابعی نوشت که دامنه آن 3 عضوی و برد آن 4 عضوی باشد؟

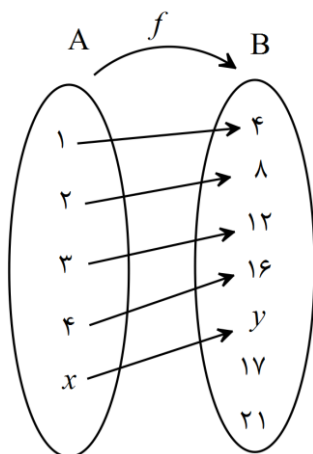
🕒 **تمرین 5-14:** شکل مقابل نمودار تابع f استو دامنه و برد تابع را بدست آورید.



🕒 **تمرین 5-15:** تابعی رسم کنید که دامنه آن بازه $[-2, 3]$ و برد آن $[-3, 4]$ باشد چند

تابع با این شرایط می توان رسم کرد ؟

○ ضابطه یا نمایش جبری یک تابع :



🕒 **تمرین 5-16:** نمودار پیکانی f به صورت مقابل داده شده است.

الف) تابع f را به صورت مجموعه ای از زوج های مرتب بنویسید.

ب) دامنه و برد تابع f را تعیین کرده و مشخص کنید دامنه و برد ، چه رابطه ای با مجموعه های

A و B دارند ؟

پ) چه قانونی بین مؤلفه اول و دوم برقرار است؟ چه رابطه ای بین x و y برقرار است.

○ نمایش جبری یا ضابطه :

به رابطه یا قانون بین اعضای دامنه و برد تابع f که به صورت عبارت ریاضی بیان می شود، ضابطه یا نمایش جبری تابع f می گویند و تابع f از مجموعه A به مجموعه B با ضابطه $f(x)$ را به صورت $f: A \rightarrow B$ نمایش می دهیم، در این نمایش، مجموعه A همواره برابر دامنه f است و بنابراین در این نمایش f ، قاعده یا قانونی است که به هر عضو مجموعه A (دامنه تابع) مانند x ، یک و تنها یک عضو از مجموعه B مانند y را نظیر می کند.

* به مجموعه B ، هم دامنه می گوییم و برد تابع f زیر مجموعه ای از هم دامنه آن است.

⌚ **تمرین 5-17:** مساحت یک مستطیل برابر 25 مترمربع است ضابطه تابعی را بنویسید که محیط این مستطیل را به عرض آن وابسته کند.

⌚ **تمرین 5-18:** اگر $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ و B مجموعه مقام اعداد حسابی زوج کم تر از

20 و $f(x) = x^2 - x$ باشد دامنه و برد و هم دامنه تابع f را مشخص کنید.

⌚ **تمرین 5-19:** اگر $f(x) = x^3 - 2x + 1$ هر یک از مقادیر زیر را بدست آورید.

الف) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = \left(\frac{17}{8}\right)$

ب) $f(\sqrt{2}) =$

ج) $f(x-1) =$

⌚ **تمرین 5-20:** اگر $f(2x-1) = 4x^2 + 2x - 3$ باشد، $f(x)$ را بیابید.

$$2x-1=t \quad x=\left(\frac{t+1}{2}\right) \quad f(t)=\left(\frac{t+1}{2}\right)^2+2\left(\frac{t+1}{2}\right)-3$$

• تشخیص نمایش تابع از روی معادله جبری :

به ازای هر x ، یک و فقط یک y داشته باشیم.

⌚ **تمرین 5-21:** بررسی کنید در کدامیک از معادلات جبری زیر ، y تابعی از x است ؟

1) $y^5 = x^7 + 1$

2) $x^2 + 4y^2 + 2 = 2x - 4y$

3) $|y^2 - 1| + (x + 1)^2 = 0$

4) $y^2 - 3y = x$

🕒 **تمرین 5-22:** طول یک مستطیل 3 واحد بیشتر از عرض آن است، رابطه ای ریاضی

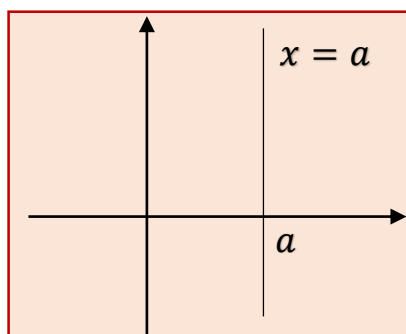
بنویسید که محیط مستطیل را بر حسب تابعی از عرض آن بیان کند.

🕒 **تمرین 5-23:** دو تابع مثال بزنید که دامنه و برد آن ها یکی باشد ولی هیچ دو زوج مرتب

مشترکی نداشته باشند.

🕒 **تمرین 5-24:** نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن $[0 و 2]$ و برد آن $[1 و -2]$ باشد چه

تعداد از این گونه توابع می توان رسم کرد ؟



🔵 **نکته 4:** خط به معادلات $x = a$ تابع نیست؛

زیرا بیشمار نقطه روی آن قرار دارد که آن نقاط برای یک

طول بیشمار عرض دارند. برای رسم این رابطه کافی است

از نقطه a روی محور x ها خطی به موازات محور عرض ها رسم کنیم.

⌚ **تمرین 5-25:** خط هایی به معادلات $x = 5$ و $x = 0$ را رسم کنید.

⌚ **تمرین 5-26:** سهمی به معادلات زیر همگی تابع هستند و از روی نمودار بحث کنید و دامنه و برد هر کدام را مشخص کنید.

الف) $y = -2(x - 1)^2$

ب) $y = 2x^2 + 4x - 1$

⌚ **تمرین 5-27:** نمودار توابع بالا را وقتی دامنه آن $[-1, 4]$ است، رسم کنید.

⌚ **تمرین 5-28:** نمایش جبری تابعی را مشخص کنید که به مکعبی به طول x :

x^2	x^2	x^2	x^2
-------	-------	-------	-------

(1) مساحت جانبی آن را حساب کند؟

(2) مساحت کل آن را حساب کند؟

		x^2	
x^2	x^2	x^2	x^2
		x^2	

(3) حجم مکعب را حساب کند.

○ انواع تابع :

1- تابع چند جمله ای :

هر تابع با ضابطه $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ که در آن a_i

ها اعدادی حقیقی باشند، یک چند جمله ای درجه $n \in N$ با شرط $a_n \neq 0$ است.

(1) $f(x) = 2x + 3$ یک تابع چند جمله ای از درجه 1 (تابعی خطی) است.

(2) مساحت مربع، مساحت جانبی و مساحت کل، تابع های چند جمله ای از درجه 2 هستند،

حجم مکعب، تابع چند جمله ای از درجه 3 است.

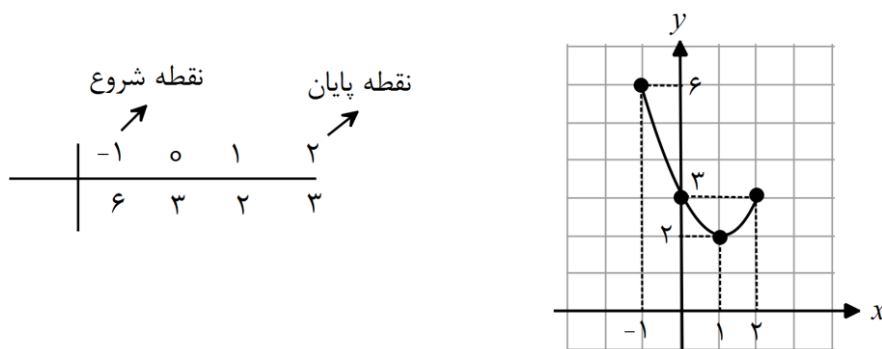
سهمی به معادله $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) تابع چند جمله ای از درجه 2 هستند.

نکته 5: در حالت کلی دامنه چند جمله ای ها عددهای حقیقی (R) هستند یعنی می توان به جای x در ضابطه آن هر عدد حقیقی دلخواهی را قرار داد. البته می توان قسمتی از آن را به عنوان دامنه در نظر گرفت.

پرسش: نمودار تابع $f(x) = x^2 - 2x + 3$ را با دامنه $[-1, 2]$ رسم و سپس برد آن را

رسم کنید.

$$\text{برد} = [2, 6]$$



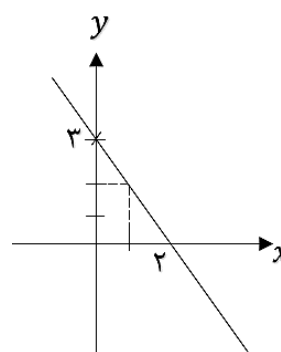
تمرین 5-29: نمودار هر یک از تابع های زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن را مشخص

نمایید.

الف) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$

x	0	2
y	3	2

$D = R \leftarrow \text{دامنه}$
 $R = R \leftarrow \text{برد}$



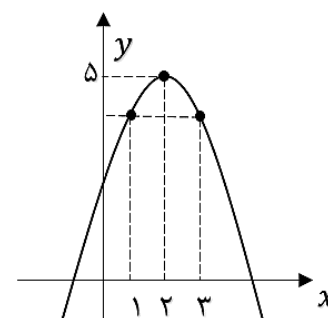
ب) $g(x) = -x^2 + 4x + 1$

$$x = -\frac{4}{-2} = 2 \rightarrow y = 5$$

x	1	2	3
y	4	5	4

دامنه $= R$

برد $= (-\infty, 5]$



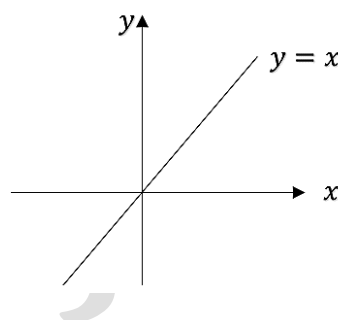
🕒 **تمرین 5-30:** فرض کنید $f(x)$ یک تابع خطی باشد به طوری که $f(-1) = 2$ و

$f(2) = -3$ ؛ ضابطه این تابع را مشخص کنید.

2- تابع همانی:

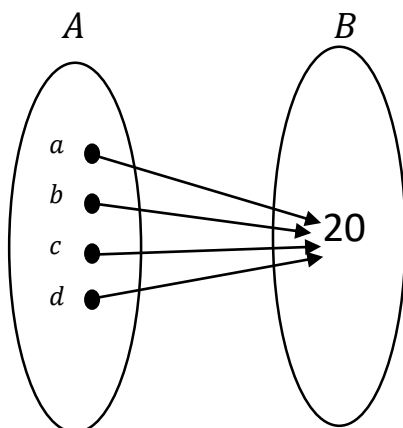
تابع با ضابطه $f(x) = x$ که به هر عضو از دامنه اش (R) همان عضو از برد را نسبت می دهد، تابع همانی می گوییم.

* نمودار تابع همانی، همان خط نیمساز ربع اول و سوم دستگاه مختصات است.



🕒 **تمرین 5-31:** فرض کنید در یک رستوران چند نوع غذا سرو می شود و مشتری می تواند از

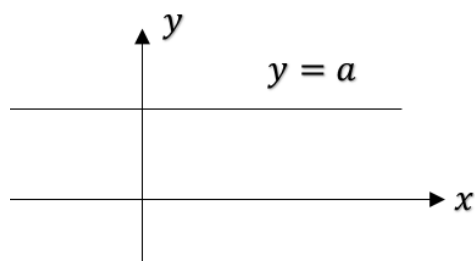
هر غذایی به هر میزان که مصرف کرد، مبلغ 20/000 تومان دریافت کند؛ فرض کنید افرادی با نام های a و b و c و d در این رستوران ناهار صرف کرده باشند، نمودار پیکانی متناظر با پرداخت پول آنها به صورت زیر است.



$$D = \{a, b, c, d\} \quad \text{دامنه}$$

$$R = \{20\} \quad \text{برد}$$

3- تابع ثابت :



معادله تابع ثابت $f(x) = a$ است که $a \in R$ و نمودار خطی آن

خطی است به موازات محور x ها که دامنه آن R

و برد آن مجموعه تک عضوی $\{a\}$ می باشد.

تمرین 5-32: نمودار تابع زیر را در دامنه های داده شده رسم کنید سپس برد آن را از روی نمودار پیدا کنید.

$$1) f(x) = -\sqrt{2} \quad D_f = (-3 \text{ و } 4]$$

$$2) f(x) = x \quad D_f = [-2 \text{ و } 3]$$

4- تابع قطعه ای (چند ضابطه ای) :

هر گاه دامنه تابع را به چند مجموعه جدا از هم تقسیم کنیم به طوری که اجتماع آن مجموعه ها برابر با دامنه تابع باشد سپس روی هر مجموعه، ضابطه ای متمایز تعریف کنیم در اینصورت تابع چند ضابطه به دست می دهد.

مثال: فرض کنید f تابعی است که دامنه آن $[-5 \text{ و } 6]$ می باشد می خواهیم f را به صورت 3 ضابطه تعریف کنیم :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & -5 \leq x < -2 \\ 2 & -2 \leq x < 2 \\ -2x & 2 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

در اینصورت $f(x)$ را تابعی 3 ضابطه می گوئیم

سؤال: نمودار این تابع را رسم کنید و از روی نمودار برد آن را مشخص کنید.

🕒 **تمرین 5-33:** تابع $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & x \geq 0 \\ 1 - 2x & x < 0 \end{cases}$ را در نظر بگیرید و حاصل $f(2\sqrt{2})$ و $f(0)$ و $f(-\sqrt{2})$ را بدست آورید.

5- تابع قدر مطلق:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} D_1 &= [0 + \infty) \\ D_2 &= (-\infty 0) \end{aligned} \Rightarrow D = D_1 \cup D_2$$

و برد $[0 + \infty)$

🕒 **تمرین 5-34:**

(1) آیا تابع قدر مطلق با ضابطه $f(x) = |x|$ یک تابع چند جمله ای است؟

(2) آیا تابع همانی چند جمله ای است؟

(3) آیا تابع ثابت چند جمله ای است؟

🕒 **تمرین 5-35:** اگر برد تابع خطی $f(x) = -5x + 2$ ، بازه $[7 و -8]$ باشد، دامنه این

تابع کدام است؟

- (1) $[-2 و 1]$ (2) $[-1 و 2]$ (3) $[-1 و 1]$ (4) $[-2 و 2]$

🕒 **تمرین 5-36:** اگر تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{ax^2 + 3x + c}{x + b}$ یک تابع همانی باشد، $\frac{b-c}{a}$

کدام است؟

- (1) 3
(2) 2
(3) 1
(4) 0

🕒 **تمرین 5-37:** اگر $f = \{(a و 3) و (b + 1 و 2) و (a^2 - 6 و -1)\}$ یک تابع ثابت باشد، $|a + b|$ کدام است؟

- (1) 2
(2) 3
(3) 4
(4) 5

🔵 **نکته 6:** شرط آن که یک معادله چند ضابطه ای، ضابطه یک تابع باشد آن است که :

اولاً: هر یک از ضابطه های آن تابع بوده و

ثانیاً: اشتراک دامنه های هر دو ضابطه دلخواه آن تهی باشد یا اگر عضو مشترکی در دامنه ها داشتند مقدار مقدار تابع در ضابطه ها به ازای آن عضو برابر شود.

🕒 **تمرین 5-38:** در کدام معادله زیر، y تابعی از x است؟

$$1) y = \begin{cases} 2x + 3 & x > 0 \\ x^2 & x < 1 \end{cases}$$

$$2) y = \begin{cases} 3x + 2 & x > 2 \\ x^3 + x & x \leq 2 \end{cases}$$

🕒 **تمرین 5-39:** اگر رابطه $y = \begin{cases} mx - x^2 & x > -1 \\ 1 - \frac{1}{x} & x \leq -1 \end{cases}$ تابع باشد، m کدام است؟

(1) -3

(2) -1

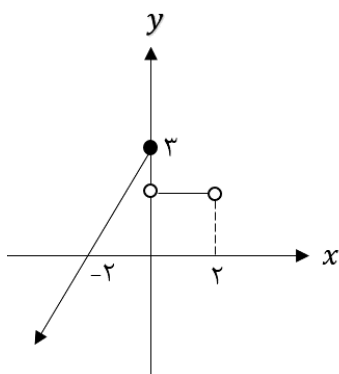
(3) 1

(4) 3

🕒 **تمرین 5-40:** نمودار تابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن را بدست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \\ 2 - x & x < 0 \end{cases}$$

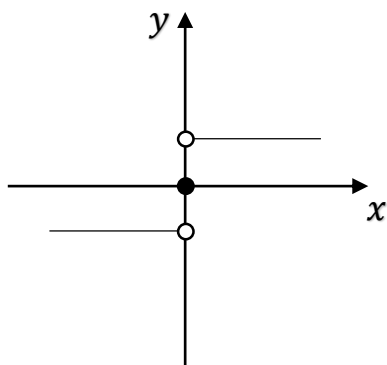
🕒 **تمرین 5-41:** ضابطه شکل مقابل را بنویسید و دامنه و برد آن را مشخص کنید.



○ تابع علامت (sgn):

یکی از توابع قطعه ای (چند ضابطه ای) معروف، تابع علامت می باشد که آن را با $\text{sgn}(x)$

نمایش می دهیم و ضابطه و نمودار آن به شکل زیر است:



$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

با توجه به نمودار معلوم می شود که $D = R$ و $R = \{-1, 0, 1\}$

برد

دامنه

➤ رسم نمودار توابع به کمک انتقال:

🕒 **تمرین 5-42:** نمودار توابع $f_1(x) = x^2$ و $f_2(x) = x^2 + 2$ را رسم کنید و

نمودارهای آنها را با هم مقایسه کنید.

🕒 **تمرین 5-43:** نمودار توابع $g_1(x) = |x|$ و $g_2(x) = |x - 2|$ و $g_3(x) =$

$|x + 2|$ را رسم کنید و نمودارهای آنها را با هم مقایسه کنید.

🕒 **تمرین 5-44:** نمودارهای زیر را رسم کنید و با هم مقایسه کنید.

$$f(x) = (x - 5)^2 - 2$$

$$g(x) = (x + 1)^2 - 1$$

$$h(x) = (x - 3)^2 + 1$$

$$t(x) = -(x + 1)^2 + 3$$

نکته 7: (نکات مهم و نتیجه گیری مثال های ارائه شده)



الف: تغییرات در راستای محور y ها:

فرض کنیم نمودار $y = f(x)$ را در اختیار داشته باشیم و $k > 0$ عددی حقیقی باشد، در اینصورت:

(1) برای رسم نمودار $y = f(x) + k$ ، کافی است نمودار $y = f(x)$ را k

واحد در جهت مثبت محور y ها (به بالا) انتقال دهیم.

(2) برای رسم نمودار $y = f(x) - k$ ، کافی است نمودار $y = f(x)$ را k

واحد در جهت منفی محور y ها (به پایین) انتقال دهیم.

(3) برای رسم نمودار $y = kf(x)$ ، کافی است عرض همه نقاط واقع بر نمودار $y =$

$f(x)$ را k برابر کنیم.

(4) برای رسم نمودار $y = \frac{1}{k}f(x)$ ، کافی است عرض همه نقاط واقع بر نمودار $y =$

$f(x)$ را بر k تقسیم کنیم.

(5) برای رسم نمودار $y = -f(x)$ ، کافی است نمودار $y = f(x)$ را نسبت به

محور x ها قرینه کنیم.

ب) تغییرات در راستای محور x ها:

فرض کنید نمودار $y = f(x)$ را در اختیار داشته باشیم و $k > 0$ عددی حقیقی باشد. در

اینصورت:

(1) برای رسم نمودار $y = f(x - k)$ ، کافی است نمودار $y = f(x)$ را k واحد

در جهت مثبت محور x ها (به سمت راست) منتقل کنیم.

(2) برای رسم نمودار $y = f(x + k)$ ، کافی است نمودار $y = f(x)$ را k واحد

در جهت منفی محور x ها (به سمت چپ) انتقال دهیم.

(3) برای رسم نمودار $y = f(kx)$ ، کافی است طول همه نقاط واقع بر نمودار $y =$

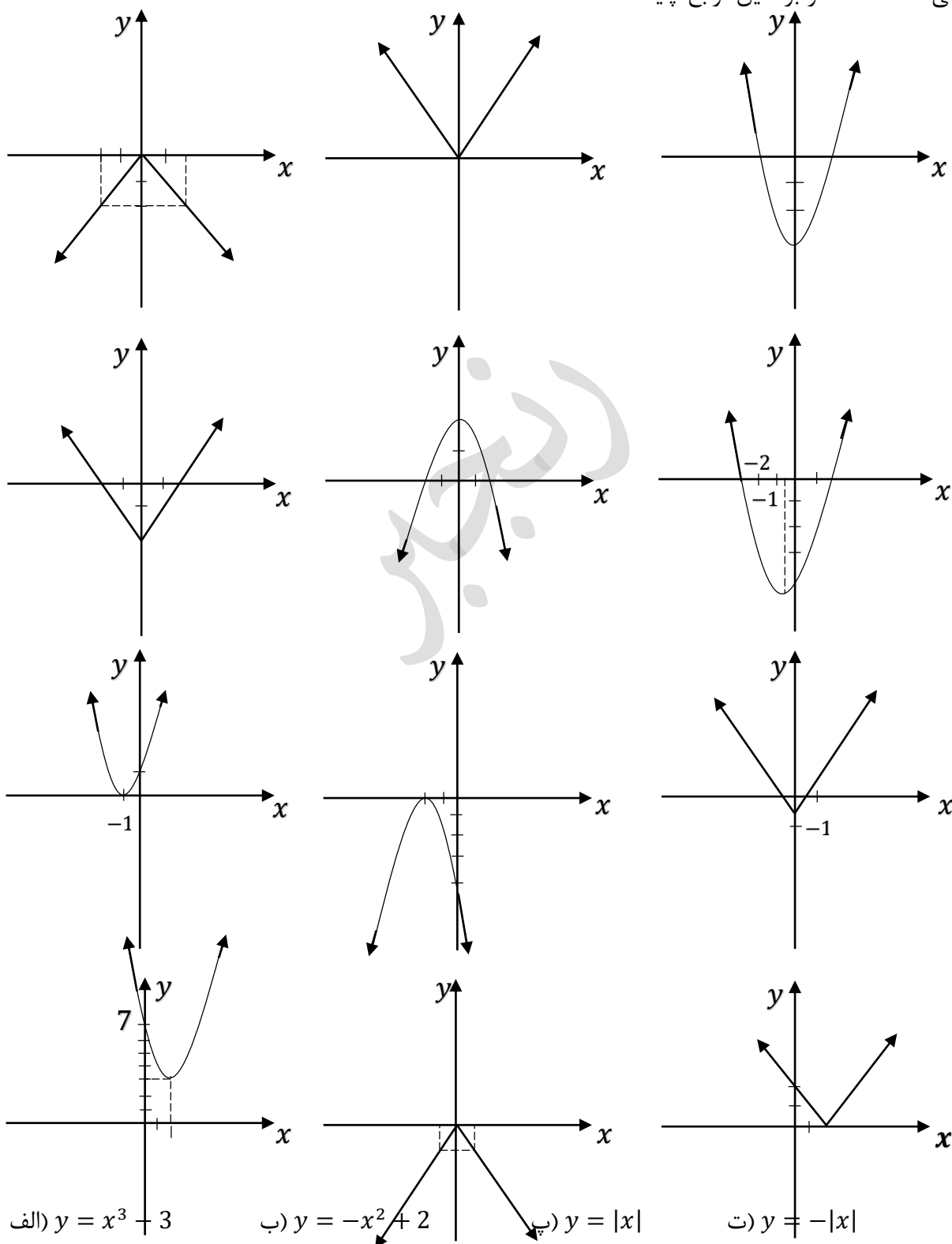
$f(x)$ را بر k تقسیم کنیم.

(4) برای رسم نمودار $y = f\left(\frac{x}{k}\right)$ ، کافی است طول همه نقاط واقع بر نمودار $y =$

$f(x)$ را در k ضرب کنیم.

5) برای رسم نمودار $y = f(-x)$ ، کافی است نمودار $y = f(x)$ را نسبت به محور y ها قرینه کنیم.

تمرین 5-45: هر یک از نمودارهای زیر کدام یک از تابع های (الف) تا (ر) را نمایش می دهد؟ دامنه و برد این توابع چیست؟



ح) $y = -(x + 2)^2$

چ) $|x - 2|$

ج) $|x| - \frac{1}{2}$

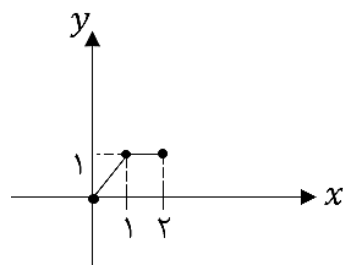
ث) $y = (x + 1)^2$

ر) $y = (x + \frac{1}{2})^2 - 3$

ذ) $y = |x| - 2$

س) $y = (x - 2)^2 + 3$

ب) $-|x| - 2$

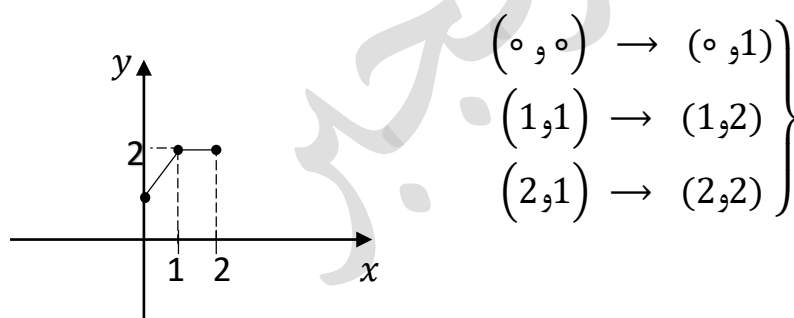


🕒 **تمرین 5-46:** نمودار $y = f(x)$ به صورت مقابل است، به کمک آن،

نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = f(x) + 1$

کافی است نمودار را یک واحد به سمت بالا ببریمو در واقع به عرض نقاط 1 واحد اضافه می شود در حالیکه x تغییری نمی کند.

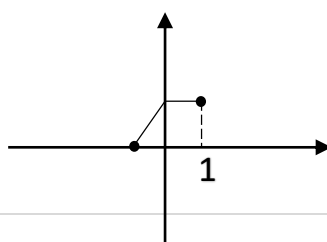


ب) $y = f(x + 1)$

کافی است نمودار $y = f(x)$ را یک واحد به سمت چپ منتقل کنیمو در واقع عرض نقاط تغییری نمی کند و یک واحد از طول کم می شودو (برد تغییر نمی کند) و دامنه یک واحد به سمت چپ می رود.

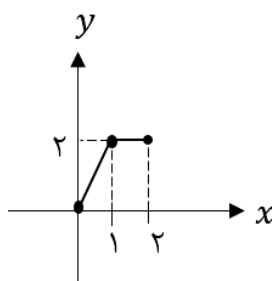
$$\left. \begin{array}{l} (0,0) \rightarrow (-1,0) \\ (1,1) \rightarrow (0,1) \\ (2,1) \rightarrow (1,1) \end{array} \right\}$$

پ) $y = 2f(x)$



کافی است عرض همه نقاط واقع بر نمودار $y = f(x)$ را در 2 ضرب کنیم.

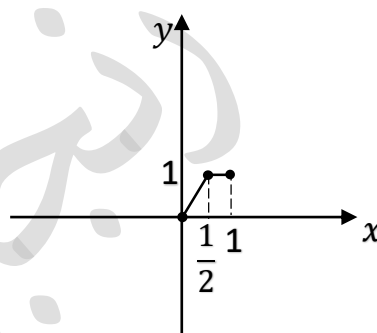
$$\left. \begin{aligned} (\circ, \circ) &\rightarrow (\circ, \circ) \\ (1, 1) &\rightarrow (1, 2) \\ (2, 1) &\rightarrow (2, 2) \end{aligned} \right\}$$



ت) $y = f(2x)$

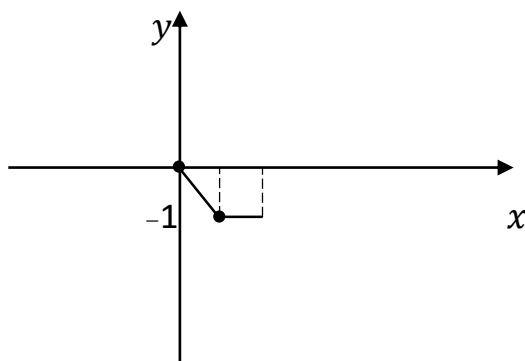
کافی است طول همه نقاط را بر 2 تقسیم کنیم.

$$\left. \begin{aligned} (\circ, \circ) &\rightarrow (\circ, \circ) \\ (1, 1) &\rightarrow (\frac{1}{2}, 1) \\ (2, 1) &\rightarrow (1, 1) \end{aligned} \right\}$$



ث) $y = -f(x)$

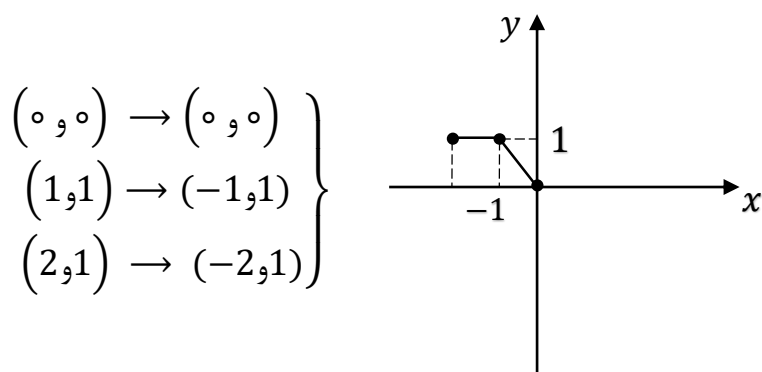
کافی است نمودار $y = f(x)$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.



$$\left. \begin{aligned} (\circ, \circ) &\rightarrow (\circ, \circ) \\ (1, 1) &\rightarrow (1, -1) \\ (2, 1) &\rightarrow (2, -1) \end{aligned} \right\}$$

$$ج) y = f(-x)$$

کافی است نمودار $y = f(x)$ را نسبت به محور y ها قرینه کنیم.

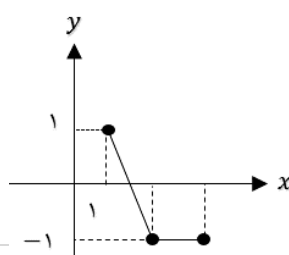


$$ج) y = -2f(x-1) + 1$$

ابتدا نمودار را یک واحد به سمت راست منتقل می کنیم تا نمودار $y = f(x-1)$ به دست آید.

سپس عرض همه نقاط را در -2 ضرب می کنیم و در نهایت نمودار $y = -2f(x-1)$ را یک واحد در راستای محور x ها به سمت بالا منتقل می کنیم.

$$\begin{aligned} (0, 0) &\xrightarrow{x+1} (1, 0) \xrightarrow{\text{عرض } \times (-2)} (1, 0) \xrightarrow{y+1} (1, 1) \\ (1, 1) &\xrightarrow{x+1} (2, 1) \xrightarrow{\text{عرض } \times (-2)} (2, -2) \xrightarrow{y+1} (2, -1) \\ (2, 1) &\xrightarrow{x+1} (3, 1) \xrightarrow{\text{عرض } \times (-2)} (3, -2) \xrightarrow{y+1} (3, -1) \end{aligned}$$



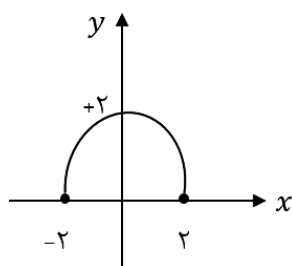
$$ح) y = \frac{1}{2}f\left(-\frac{x}{2}\right) - 1$$

ابتدا طول همه نقاط واقع بر نمودار $y = f(x)$ را در 2- ضرب می کنیم تا نمودار $y = f\left(-\frac{x}{2}\right)$ به دست آید و سپس عرض همه نقاط $y = f\left(-\frac{x}{2}\right)$ را در $\frac{1}{2}$ ضرب می کنیم تا نمودار $y = \frac{1}{2}f\left(-\frac{x}{2}\right)$ به دست آید. در نهایت $y = \frac{1}{2}f\left(-\frac{x}{2}\right)$ را یک واحد در راستای محور y ها به پایین منتقل می کنیم. (یعنی y ها 1- می شوند).

$$\begin{aligned} (0, 0) &\xrightarrow{-2 \times \text{طول}} (0, 0) \xrightarrow{\frac{1}{2} \times \text{عرض}} (0, 0) \xrightarrow{y \text{ ها } -1} (0, -1) \\ (1, 1) &\xrightarrow{-2 \times \text{طول}} (-2, 1) \xrightarrow{\frac{1}{2} \times \text{عرض}} \left(-2, \frac{1}{2}\right) \xrightarrow{y \text{ ها } -1} \left(-2, -\frac{1}{2}\right) \\ (2, 1) &\xrightarrow{-2 \times \text{طول}} (-4, 1) \xrightarrow{\frac{1}{2} \times \text{عرض}} \left(-4, \frac{1}{2}\right) \xrightarrow{y \text{ ها } -1} \left(-4, -\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

مثال: نمودار تابع f با ضابطه $y = f(x)$ به صورت مقابل است و نمودار تابع با ضابطه

$y = f(1 - 2x)$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را به صورت بازه نمایش دهید.



نمونه سوالات پایان فصل

1- آیا رابطه $y^2 - 4y - x + 3 = 0$ تابع است؟ چرا؟

2- مقادیر x و y را طوری بیابید که تساوی زیر برقرار باشد:

$$\left(\frac{3}{x} - \frac{2}{y} - 7\right) = \left(7 + \frac{1}{x} + \frac{5}{y}\right)$$

3- m و n و p را طوری بیابید که رابطه زیر تابع باشد:

$$f = \left\{ (2, 81), (-1, (2m - 6)^2 + (n + 1)^2), (2, 3^{2p-n}), (-1, 0) \right\}$$

$$f = \{(x, y) \mid x, y \in R, y^3 + y - x = 0\}$$

4- آیا رابطه مقابل تابع است؟ چرا؟

5- اگر تابع $f(x) = 3x + a$ ، مقدار a را طوری بیابید که داشته باشیم: $f(f(-1)) = 7$

6- اگر $f(x) = 2x^2 - x$ و $g(x) = 3x - 2$ باشد، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$f(2g(-3) + 2f(2) - 5)$$

7- مقدار k را طوری بیابید که رابطه مقابل تابع باشد:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x & \text{و } x \leq 1 \\ kx + 1 & \text{و } x \geq 1 \end{cases}$$

8- در تابعی داریم: $f(x) + f(4) = x^2 + 2$ ؛ مطلوب است $f(-3)$ ؟

9- اگر $f\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = x^6 + \frac{1}{x^6} + 2$ ؛ مطلوب است محاسبه $f(x) = ?$.

10- دامنه توابع زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = \sqrt{1-x} + x\sqrt{x-3}$

ب) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{(x^2-2x-3)^3}$

11- مقادیر a و b را طوری بیابید که رابطه زیر تابع بوده و $f(2) = 7$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & x \geq -1 \\ 3x^2 + x - 1 & x \leq -1 \end{cases}$$

12- ثابت یا همانی بودن توابع زیر را مشخص کنید.

الف) $f(x) = 3\cos^2(2x - 7) + 3\sin^2(2x - 7)$

ب) $x^4 + y^4 + 6x^2y^2 = 4xy(x^2 + y^2)$

13- اگر تابع f چنین تعریف شده باشد: $f(x) + 2f\left(\frac{1391}{x}\right) = x$ ؛ مطلوب است مقدار $f(13)$

14- اگر برد تابع $f = \{(1, 14), (2, a^2 - 2), (3, b^2 + 13b), (4, 14)\}$ دارای

یک عضو باشد، آنگاه حاصل ab چند مقدار متفاوت می تواند داشته باشد؟ (کنکور سراسری)

15- نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^3 + ax + b$ و خط به معادله $y + 2x = b$ در نقطه ای به

طول 1 روی محور x ها متقاطع اند و طول دو نقطه دیگر تقاطع این منحنی و خط کدام است؟

(1) 2 و -1 (2) 3 و -1 (3) -1 و 0 (4) 2 و 0 (کنکور سراسری)

16- اگر $f(x)x + \sqrt{x}$ و $g = \{(1, 2), (5, 4), (6, 5), (2, 3)\}$ و $g(f(a)) = 5$ عدد a کدام است؟

- (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

17- در تابع با ضابطه $f(x) = x^2(2-x)^2$ ، حاصل $f(1+x) - f(1-x)$ کدام است؟

- (1) صفر (2) $4x$ (3) $2x^2$ (4) $4x^2$ (کنکور سراسری)

18- رابطه $(m, 4)$ و $(3, m+2)$ و $(-2, m)$ و $(-3, m)$ و $(2, 1)$ و $(3, m^2)$ به A به

ازای کدام مقدار m یک تابع است؟

- (1) -2 (2) -1 (3) 3 (4) هیچ مقدار m

19- کدام یک تابع نیست؟ چرا؟

- (1) $y = x^3$
 (2) $y^2 = x^3$
 (3) $y^4 = x^3 + 1$
 (4) $y^2 = -x^2$

$$x = \sin y \quad (5)$$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -2 \quad (6)$$

$$x = [y] \quad (7)$$

رنجبر