

دینامیک

مجموعه مهندسی مکانیک

دکتر رضا تیموری

مؤسسه آموزش عالی آزاد پارسه

پارسه

فصل اول دینامیک ذرات

۸ تعابیر هندسی سرعت و شتاب
۱۰ حرکت ذره در مسیر دایروی
۱۰ الف) اگر شتاب مقدار ثابت باشد
۱۰ ب) اگر شتاب تابعی از زمان باشد
۱۱ ج) اگر شتاب تابعی از مکان باشد
۱۱ د) اگر شتاب تابعی از سرعت باشد
۱۳ حرکت منحنی الخط در صفحه
۱۳ الف - دستگاه مختصات دکارتی
۱۴ ب - دستگاه مختصات استوانه‌ای (دستگاه مختصات قطبی)
۱۵ ج - دستگاه مختصات قائم و مماسی
۱۶ د - دستگاه مختصات کروی
۱۷ جمع‌بندی
۲۴ رابطه سرعت‌ها و شتاب‌های نسبی و دستگاه‌های چرخان
۲۵ جمع‌بندی
۲۷ مفهوم شتاب کریولیس
۳۰ قانون دوم نیوتن و اصل دالامبر

فصل دوم کار و انرژی

۳۵ محاسبه کار نیروی فنر
۳۶ محاسبه کار نیروی وزن
۳۶ محاسبه کار نیروی گرانش
۳۷ انواع نیروها
۳۷ شرط پایستار بودن نیروها
۳۸ قضیه کار و انرژی
۳۸ قانون بقای انرژی

۳۸	اندازه حرکت خطی و زاویه‌ای
۳۹	قانون بقای اندازه حرکت خطی
۳۹	قانون بقای اندازه حرکت زاویه‌ای
۳۹	جمع‌بندی

فصل سوم برخورد ذرات

۴۰	معادلات در راستای عمود بر ضربه
۴۱	معادلات در راستای ضربه
۴۲	جمع‌بندی
۵۴	قوانین بقا
۵۵	مثال (۱)
۵۶	مثال (۲)
۵۷	مثال (۳)
۵۸	مثال (۴)

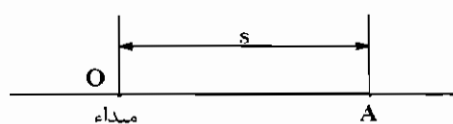
فصل چهارم دینامیک اجسام صلب

۶۰	الف) حرکت انتقالی
۶۰	ب) حرکت دورانی
۶۱	ج) حرکت عمومی
۶۱	اصل دالامبر
۶۳	الف - جسم حول نقطه ثابت O (مرکز دایمی دوران) دوران می‌کند
۶۳	ب - جسم دارای حرکت عمومی است
۶۴	ج - اگر مرکز آنی دوران جسم مشخص باشد
۶۴	د - اگر روابط گشتاور و اندازه حرکت زاویه‌ای حول نقطه O نوشته شود که امتداد سرعت و شتاب آن نقطه از مرکز جرم بگذرد
۶۵	انرژی جنبشی
۶۵	الف - جسم دارای حرکت عمومی است
۶۶	ب - جسم دارای مرکز دوران است
۶۶	جمع‌بندی
۶۶	تحلیل سه بعدی
۶۸	معادلات اویلر در حالت خاص
۶۹	روابط لختی چند جسم صلب
۶۹	مثال‌هایی از دینامیک اجسام صلب
۷۹	تست‌های نمونه

فصل اول

دینامیک ذرات

حرکت مستقیم الخط (Rectilinear Motion) :



حرکتی است که در آن ذره بر روی یک خط راست حرکت می کند و موقعیت اش نسبت به یک نقطه به نام مبدأ (نقطه O) مشخص می شود. متغیر s مکان ذره در زمان t می باشد.

اگر مکان ذره در زمان t_1 و s_1 و در زمان t_2 و s_2 باشد سرعت متوسط و لحظه ای ذره به صورت زیر تعریف می شوند.

$$v_{av} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} \quad (\text{سرعت متوسط})$$

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \quad (\text{سرعت لحظه ای})$$

به طور مشابه شتاب متوسط و لحظه ای نیز تعریف می شوند.

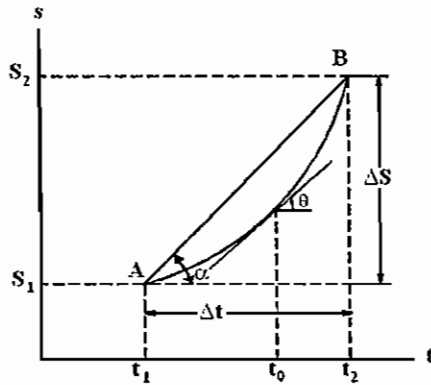
$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \quad (\text{شتاب متوسط})$$

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{s} \quad (\text{شتاب لحظه ای})$$

که در آن v_1 سرعت لحظه ای ذره در زمان t_1 و v_2 سرعت لحظه ای ذره در زمان t_2 می باشد.

تعبیر هندسی سرعت و شتاب:

مطابق شکل مقابل نتیجه می شود



نمودار مکان - زمان

$$\tan \alpha = \frac{\Delta s}{\Delta t} = v_{av}$$

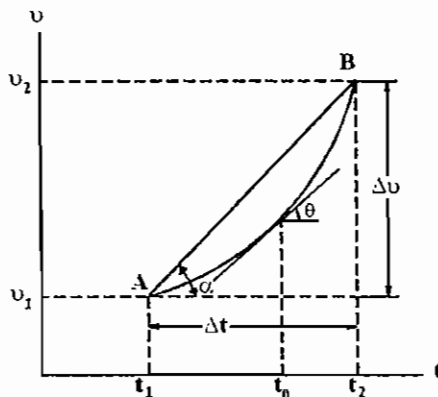
$$\tan \theta = \dot{s}(t_0) = v(t_0)$$

به عبارت دیگر

سرعت متوسط بین زمان های t_1 و t_2 ، شیب خط قاطع بر منحنی مکان - زمان بین آن دو لحظه می باشد.

سرعت لحظه ای در زمان t_0 ، شیب خط مماس بر منحنی مکان - زمان در زمان t_0 می باشد.

با مشاهده نمودار سرعت زمان نتیجه می شود



نمودار سرعت - زمان

$$\tan \alpha = \frac{\Delta v}{\Delta t} = a_{av}$$

$$\tan \theta = \dot{v}(t_0) = a(t_0)$$

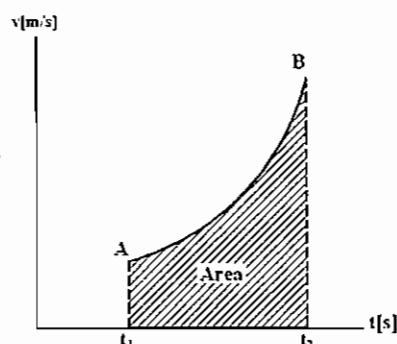
و در نتیجه

- شتاب متوسط بین زمان های t_1 و t_2 ، شیب خط قاطع بر منحنی سرعت - زمان بین آن دو لحظه زمان می باشد.

- شتاب لحظه ای در زمان t_0 ، شیب خط مماس بر منحنی سرعت - زمان در زمان t_0 می باشد.

با توجه به تعریف سرعت لحظه ای رابطه زیر حاصل می گردد.

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow ds = v dt \Rightarrow \int_{s_1}^{s_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} v dt \Rightarrow \Delta s = s_2 - s_1 = \int_{t_1}^{t_2} v dt = \text{Area}$$

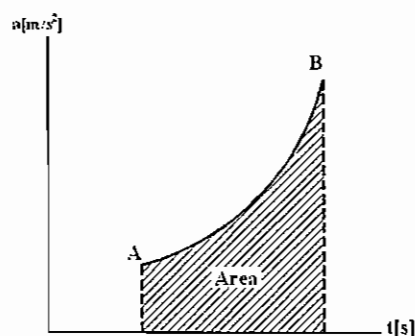


- سطح زیر منحنی سرعت - زمان بین زمان های t_1 و t_2 مسافت طی شده

بین این دو لحظه زمان می باشد. واحد این سطح $\frac{m}{s} \times s = m$ خواهد بود که با Δs هم واحد می باشد.

و به طور مشابه

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a dt \Rightarrow \int_{v_1}^{v_2} dv = \int_{t_1}^{t_2} a dt \Rightarrow \Delta v_1 = v_2 - v_1 = \int_{t_1}^{t_2} a dt = \text{Area}$$



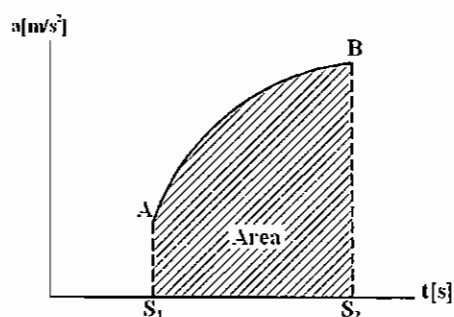
نمودار شتاب - زمان

سطح زیر منحنی شتاب - زمان بین زمان‌های t_1 و t_2 ، تغییرات سرعت بین این دو لحظه زمان می‌باشد. واحد این سطح $\frac{m}{s^2} \times s = \frac{m}{s}$ خواهد بود که با Δv هم واحد می‌باشد.

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{v}{a} = \frac{ds}{dv} \Rightarrow v dv = a ds$$

$$\Rightarrow \int_{v_1}^{v_2} v dv = \int_{s_1}^{s_2} a ds \Rightarrow \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = \int_{s_1}^{s_2} a ds$$

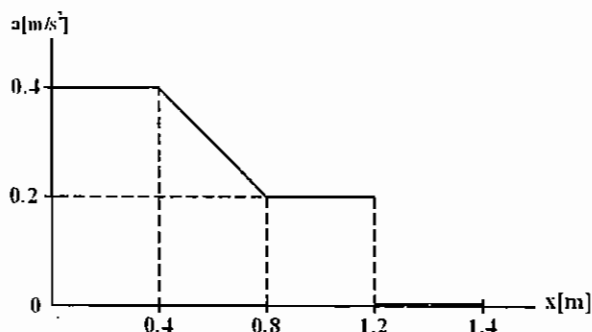
سطح زیر منحنی شتاب - مکان بین مکان‌های s_1 و s_2 ، برابر است با: نصف تفاضل مجذور سرعت‌های ذره در این دو مکان.



نمودار شتاب - مکان

تست نمونه

تست سال (۷۷ - ۷۶)



$v_0 = 0.1$ ، Area (سطح زیر منحنی شتاب - مکان)

$$= 0.4 \times 0.4 + \left(\frac{0.4 + 0.2}{2} \right) \times 0.4 + 0.2 \times 0.4$$

$$= 0.36 = \frac{1}{2} (v^2 - (0.1)^2)$$

$$\Rightarrow v(x=1.4) = 0.85 \left[\frac{m}{s} \right]$$

حرکت ذره در مسیر دایروی:

ذره‌ای در زمان t در نقطه A قرار دارد و روی مسیر دایره‌ای به مرکزی O و شعاع R حرکت می‌کند. سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای برای شعاع حاصل OA به صورت زیر تعریف می‌شوند.

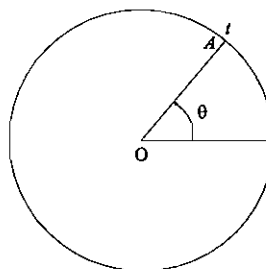
$$\omega_{av} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} \quad \text{سرعت زاویه‌ای متوسط}$$

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \dot{\theta} \quad \text{سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای}$$

$$\alpha_{av} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} \quad \text{شتاب زاویه‌ای متوسط}$$

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\theta} \quad \text{شتاب زاویه‌ای لحظه‌ای}$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(R\theta) = R\dot{\theta} = R\omega \quad \text{سرعت خطی لحظه‌ای ذره}$$



تست سال (۷۰ - ۶۹)

عبارت سرعت زاویه‌ای در حرکتی به صورت $\omega = \sqrt{\frac{2g}{a}(1 - \cos\theta)}$ می‌باشد. شتاب زاویه‌ای برابر است با:

$$\begin{array}{llll} \frac{g \sin \theta}{a} & (۱) & \frac{\frac{g \sin \theta}{a}}{\sqrt{\frac{2g}{a}(1 - \cos\theta)}} & (۲) \\ \frac{g}{a}(1 - \sin\theta) & (۳) & & \\ \text{هیچ کدام} & (۴) & & \end{array}$$

$$\alpha = \dot{\omega} = \frac{\frac{2g}{a} \dot{\theta} \sin \theta}{2\sqrt{\frac{2g}{a}(1 - \cos\theta)}} = \frac{\frac{g}{a} \omega \sin \theta}{\dot{\theta} = \omega} = \frac{g}{a} \sin \theta$$

جواب گزینه (۱) می‌باشد.

در مسائل مختلف می‌تواند شتاب تابعی از زمان، مکان، سرعت و یا ثابت باشد و این تابعیت معلوم باشد. در این صورت می‌توان روابط سرعت و مکان را به دست آورد. نحوه محاسبه روابط مذکور به صورت زیر می‌باشد.

الف) اگر شتاب مقدار ثابت باشد:

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a dt \Rightarrow \int_{v_0}^v dv = \int_0^t a dt = a \int_0^t dt = at \Rightarrow \boxed{v = v_0 + at}$$

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow ds = v dt \Rightarrow \int_{s_0}^s ds = \int_0^t v dt = \int_0^t (at + v_0) dt = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \Rightarrow \boxed{s = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0}$$

ب) اگر شتاب، تابعی از زمان باشد $a = f(t)$:

$$a = \frac{dv}{dt} = f(t) \Rightarrow \int_{v_0}^v dv = \int_0^t f(t) dt = g(t) \Rightarrow \boxed{v = v_0 + g(t)}$$

$$v = \frac{ds}{dt} = v_0 + g(t) \Rightarrow \int_{s_0}^s ds = \int_0^t (v_0 + g(t)) dt \Rightarrow s = s_0 + v_0 t + \int_0^t g(t) dt \quad p(t) = \int_0^t g(t) dt \Rightarrow$$

$$\boxed{s = s_0 + v_0 t + p(t)}$$

ج) اگر شتاب، تابعی از مکان باشد $a = f(s)$:

$$v dv = a ds = f(s) ds \Rightarrow \int_{v_0}^v v dv = \int_{s_0}^s f(s) ds = g(s)$$

$$\Rightarrow \frac{v^2 - v_0^2}{2} = g(s) \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{v_0^2 + 2g(s)}}$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{v_0^2 + 2g(s)} \Rightarrow \int_0^t dt = \int_{s_0}^s \frac{ds}{\sqrt{v_0^2 + 2g(s)}} = p(s) \Rightarrow t = p(s) \Rightarrow$$

$$\boxed{s = p^{-1}(t) \text{ (معکوس تابع } p(t) \text{)}}$$

د) اگر شتاب، تابعی از سرعت باشد $a = f(v)$:

روش اول:

$$a = \frac{dv}{dt} = f(v) \rightarrow \frac{dv}{f(v)} = dt \Rightarrow \int_{v_0}^v \frac{dv}{f(v)} = g(v) = \int_{t_0}^t dt = t \Rightarrow v = g^{-1}(t) \text{ (معکوس تابع } g(t) \text{)}$$

$$v = \frac{ds}{dt} = g^{-1}(t) \Rightarrow ds = g^{-1}(t) dt \Rightarrow \int_{s_0}^s ds = \int_0^t g^{-1}(t) dt = p(t) \Rightarrow \boxed{s = s_0 + p(t)}$$

روش دوم:

$$v dv = a ds = f(v) ds \Rightarrow \frac{v dv}{f(v)} = ds \Rightarrow \int_{v_0}^v \frac{v dv}{f(v)} = g(v) = \int_{s_0}^s ds = s - s_0 \Rightarrow \boxed{s = s_0 + g(v)}$$

$$\Rightarrow v = g^{-1}(s - s_0) = \frac{ds}{dt} \Rightarrow \int_0^t dt = \int_{s_0}^s \frac{ds}{g^{-1}(s - s_0)} = p(s) \Rightarrow t = p(s) \Rightarrow \boxed{s = p^{-1}(t)}$$

مثال برای حالت (ج)

اگر $a = -k^2 s$ باشد (در سیستم جرم و فنر، شتاب جرم a بر حسب جابه‌جایی جرم از رابطه مذکور تبعیت می‌کند).

روش اول:

$$v dv = a ds = -k^2 s ds \Rightarrow \int_{v_0}^v v dv = -k^2 \int_0^s s ds \Rightarrow \frac{v^2 - v_0^2}{2} = -\frac{k^2 s^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 - k^2 s^2}$$

$$\frac{ds}{dt} = v = \sqrt{v_0^2 - k^2 s^2} \Rightarrow \frac{ds}{\sqrt{v_0^2 - k^2 s^2}} = dt \Rightarrow \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{v_0^2 - k^2 s^2}} = \int_0^t dt = t$$

از تغییر متغیر $\sin \alpha = \frac{ks}{v_0}$ استفاده می‌کنیم.

$$\cos \alpha d\alpha = \frac{k}{v_0} ds \Rightarrow ds = \frac{v_0 \cos \alpha d\alpha}{k}, \quad \alpha = \sin^{-1} \left(\frac{ks}{v_0} \right)$$

$$t = \int_0^{\sin^{-1}\left(\frac{ks}{v_0}\right)} \frac{\frac{v_0}{k} \cos \alpha d\alpha}{v_0 \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{1}{k} \sin^{-1}\left(\frac{ks}{v_0}\right) \Rightarrow \sin^{-1}\left(\frac{ks}{v_0}\right) = kt \Rightarrow \boxed{s = \frac{v_0}{k} \sin kt}$$

$$\Rightarrow \boxed{v = \frac{ds}{dt} = v_0 \cos kt}$$

روش دوم:

$$a = \ddot{s} = -k^2 s \Rightarrow \ddot{s} + k^2 s = 0 \Rightarrow r^2 + k^2 = 0 \Rightarrow r = \pm ik \text{ ریشه‌های معادله مشخصه}$$

$$\Rightarrow s = A \cos kt + B \sin kt \Rightarrow s(0) = 0 = A, \quad \dot{s}(t) = k(-A \sin kt + B \cos kt)$$

$$\Rightarrow v(0) = v_0 = \dot{s}(0) = Bk \Rightarrow B = \frac{v_0}{k} \Rightarrow \boxed{s = \frac{v_0}{k} \sin kt}$$

مثال برای حالت (د)

اگر $a = -k^2 v$ باشد (در سیستم جرم متصل به دمپر، شتاب جرم a بر حسب سرعت جرم v از رابطه ذکر شده تبعیت می‌کند).

روش اول:

$$v dv = a ds = -k^2 v ds \rightarrow \int_{v_0}^v dv = -k^2 \int_{s_0}^s ds \rightarrow v - v_0 = -k^2 (s - s_0) \Rightarrow v = (v_0 + k^2 s_0) - k^2 s$$

$$\Rightarrow \frac{ds}{dt} = -k^2 \left(s - \frac{k^2 s_0 + v_0}{k^2} \right) \Rightarrow \frac{ds}{s - \frac{k^2 s_0 + v_0}{k^2}} = -k^2 dt \Rightarrow \int_{s_0}^s \frac{ds}{s - \frac{k^2 s_0 + v_0}{k^2}} = -k^2 \int_0^t dt = -k^2 t$$

$$\Rightarrow \ln \left| \frac{s - \frac{k^2 s_0 + v_0}{k^2}}{-\frac{v_0}{k^2}} \right| = -k^2 t \Rightarrow s = \frac{k^2 s_0 + v_0}{k^2} - \frac{v_0}{k^2} e^{-k^2 t} \Rightarrow \boxed{s = s_0 + \frac{v_0}{k^2} (1 - e^{-k^2 t})}$$

$$\Rightarrow \boxed{v = v_0 e^{-k^2 t}}$$

روش دوم:

$$a = -k^2 v = \frac{dv}{dt} \Rightarrow -k^2 dt = \frac{dv}{v} \Rightarrow -k^2 \int_0^t dt = \int_{v_0}^v \frac{dv}{v} \Rightarrow -k^2 t = \ln \left(\frac{v}{v_0} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{v = v_0 e^{-k^2 t}} \Rightarrow \frac{ds}{dt} = v_0 e^{-k^2 t} \Rightarrow \int_{s_0}^s ds = v_0 \int_{t_0}^t e^{-k^2 t} dt \Rightarrow \boxed{s = s_0 + \frac{v_0}{k^2} (1 - e^{-k^2 t})}$$

حرکت منحنی الخط در صفحه (*Plane curvilinear motion*):

در این بخش حرکت ذره در یک صفحه مورد بررسی قرار می‌گیرد و مولفه‌های سرعت و شتاب در دستگاه‌های مختصات زیر ارایه می‌شوند.

الف - دستگاہ مختصات دکارتی

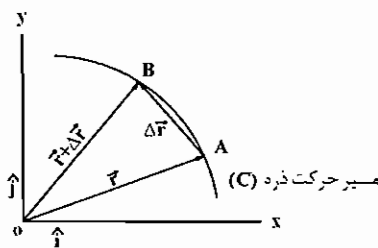
ب - دستگاه مختصات استوانه‌ای و در حالت خاص قطبی

ج۔ دستگاہ مختصات قائم و مماسی

د۔ دستگاہ مختصات کروی

الف۔ دستگاه مختصات دکارتی:

ذره‌ای روی مسیر منحنی (c) حرکت می‌کند و در زمان t در نقطه A قرار دارد و در زمان $t + \Delta t$ به نقطه B حرکت می‌کند سرعت و شتاب ذره به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.



$$\bar{v}_{av} = \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} \quad , \quad \bar{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} \quad (\text{سرعت لحظه‌ای})$$

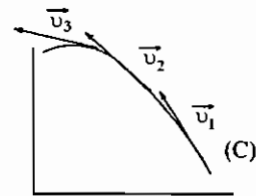
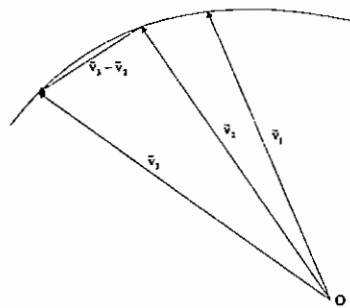
لذا سرعت دو مولفه افقی و عمودی $v_x = \dot{x}$ و $v_y = \dot{y}$ را دارد. از آنجایی که $\frac{1}{\Delta t}$ یک عدد می‌باشد، لذا بردار $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ برداری است در راستای بردار $\Delta \vec{r}$ (خط قاطع بر نقاط A و B) در حالت حدی که $\Delta t \rightarrow 0$ نقطه B به A منطبق می‌شود و خط قاطع بر نقاط A و B به خط مماس بر نقطه A تبدیل می‌شود. بنابراین بردار سرعت لحظه‌ای \vec{v} مماس بر مسیر خواهد بود.

$$\bar{a}_{av} = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} \quad (\text{شتاب متوسط})$$

$$\bar{\mathbf{a}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{\mathbf{v}}}{\Delta t} = \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = \dot{v}_x \hat{\mathbf{i}} + \dot{v}_y \hat{\mathbf{j}} = \ddot{x} \hat{\mathbf{i}} + \ddot{y} \hat{\mathbf{j}} = a_x \hat{\mathbf{i}} + a_y \hat{\mathbf{j}}$$

بنابراین بردار شتاب لحظه‌ای دارای دو مولفه افقی و عمودی $a_x = \ddot{x}$ ، $a_y = \ddot{y}$ می‌باشد.

همان‌طور که قبلاً دیدیم بردار سرعت لحظه‌ای همواره مماس بر مسیر حرکت می‌باشد. بردار شتاب لحظه‌ای هم همواره مماس بر یک منحنی به نام منحنی شتاب‌نما (Hodograph) می‌باشد. برای ترسیم این منحنی در ابتدا از یک نقطه ثابت O بردارهای هم‌سنگ سرعت نقاط مختلف مسیر حرکت ذره بر روی مسیر (C) را رسم می‌کنیم و سپس انتهای بردارهای ترسیم شده را به هم وصل می‌کنیم بدین ترتیب یک منحنی به دست می‌آید که منحنی شتاب‌نما نامیده می‌شود. چرا که خط قاطع بر این منحنی بردار تفاضل سرعت‌های لحظه‌ای دو موقعیت ذره را نشان می‌دهد که در حالت حدی به خط مماس که راستای شتاب لحظه‌ای را مشخص می‌کند تبدیل می‌شود.

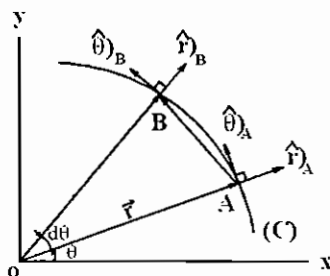


ب - دستگاه مختصات استوانه‌ای:

نخست به بررسی حالت خاص این دستگاه یعنی دستگاه مختصات قطبی که برای نمایش حرکت ذره در صفحه می‌باشد پرداخته می‌شود.

دستگاه مختصات قطبی:

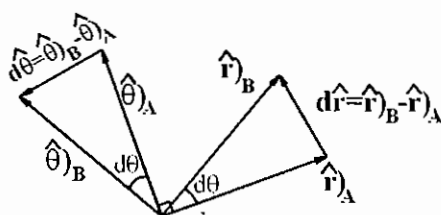
در این دستگاه بردار موقعیت از رابطه مقابل به دست می‌آید $\vec{r} = r\hat{r}$. بردارهای یک‌ه‌ای این دستگاه \hat{r} و $\hat{\theta}$ هستند که با تغییر موقعیت ذره این بردارهای یک‌ه‌ای نیز تغییر می‌کنند، لذا نسبت به زمان مشتق دارند. مطابق شکل بعد نتیجه می‌شود:



$$|d\vec{r}| = 1 \times d\theta \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{d\tau} = \left| \frac{d\vec{r}}{d\tau} \right| \hat{\theta} = \frac{d\theta}{d\tau} \hat{\theta} = \dot{\theta} \hat{\theta}$$

$$|d\hat{\theta}| = 1 \times d\theta \Rightarrow \frac{d\hat{\theta}}{d\tau} = \left| \frac{d\hat{\theta}}{d\tau} \right| (-\hat{r}) = \frac{d\theta}{d\tau} (-\hat{r}) = -\dot{\theta} \hat{r}$$

در روابط بالا $\frac{d}{d\tau}$ در مفهوم مشتق نسبت به زمان می‌باشد، بنابراین مشتق بردارهای یک‌ه‌ای نسبت به زمان از روابط زیر محاسبه می‌شوند.



$$\dot{\hat{r}} = \dot{\theta} \hat{\theta}$$

$$\dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta} \hat{r}$$

روابط فوق برای محاسبه مولفه‌های سرعت و شتاب ذره به کار خواهند رفت.

روش کلی‌تری برای محاسبه مشتقات برداری که نسبت به زمان در هر دستگاه مختصات دلخواه وجود دارد. اگر $\hat{\lambda}$ بردار یک‌ه‌ای دستگاه مختصات دلخواه باشد مشتق برداری که نسبت به زمان، $\dot{\hat{\lambda}}$ از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\dot{\hat{\lambda}} = \vec{\omega} \times \hat{\lambda}$$

که در آن $\vec{\omega}$ بردار سرعت زاویه‌ای می‌باشد.

مثلاً در دستگاه مختصات قطبی $\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{k}$ و بنابراین:

$$\dot{\hat{r}} = \vec{\omega} \times \hat{r} = \dot{\theta} \hat{k} \times \hat{r} = \dot{\theta} \hat{\theta}$$

$$\dot{\hat{\theta}} = \vec{\omega} \times \hat{\theta} = \dot{\theta} \hat{k} \times \hat{\theta} = \dot{\theta} (-\hat{r})$$

که همان جواب قبلی به دست آمدند. حال مولفه‌های سرعت و شتاب محاسبه می‌شوند.

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}(r\hat{r}) = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\hat{r}} = \dot{r}\hat{r} + r(\dot{\theta}\hat{\theta}) = \dot{r}\hat{r} + (r\dot{\theta})\hat{\theta} = v_r\hat{r} + v_\theta\hat{\theta}$$

مولفه‌های سرعت در دستگاه مختصات قطبی $v_r = \dot{r}$ و $v_\theta = r\dot{\theta}$ می‌باشند.

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{v}_r\hat{r} + v_r\dot{\hat{r}} + \dot{v}_\theta\hat{\theta} + v_\theta\dot{\hat{\theta}} = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}(\dot{\theta}\hat{\theta}) + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta} + r\dot{\theta}(-\dot{\theta}\hat{r})$$

$$\Rightarrow \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta} = a_r\hat{r} + a_\theta\hat{\theta}$$

مولفه‌های شتاب در دستگاه مختصات قطبی $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ و $a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$ خواهند بود.

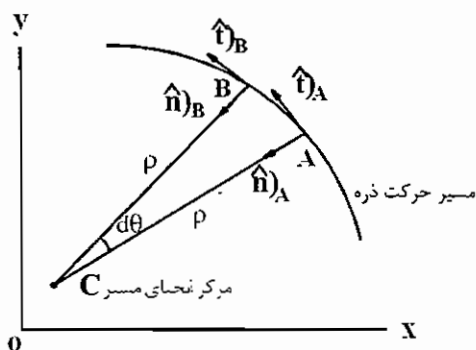
برای دستگاه مختصات استوانه‌ای بردارهای سرعت و شتاب عبارتند از :

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + (r\dot{\theta})\hat{\theta} + \dot{z}\hat{k} \Rightarrow v_r = \dot{r}, v_\theta = r\dot{\theta}, v_z = \dot{z}$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta} + \ddot{z}\hat{k} \Rightarrow a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}, a_z = \ddot{z}$$

ج) دستگاه مختصات قائم و مماسی (Normal and tangential coordinates):

با توجه به شکل مقابل می‌توان نوشت



$$AB \text{ کمان} = ds = \rho d\theta$$

ρ : شعاع انحنای مسیر

$$v_t = \dot{s} = \frac{ds}{dt} = \rho \frac{d\theta}{dt} = \rho \dot{\theta}$$

$$\vec{v}_t = v_t \hat{t} = \rho \dot{\theta} \hat{t} \text{ بردار سرعت مماسی}$$

در این دستگاه بردارهای یک عمود بر مسیر، \hat{n} و مماس بر مسیر \hat{t} با حرکت ذره از یک نقطه به نقطه دیگر تغییر می‌کنند لذا نسبت

به زمان مشتق دارند که از رابطه $\dot{\hat{\lambda}} = \vec{\omega} \times \hat{\lambda}$ این مشتقات محاسبه خواهند شد. در این دستگاه $\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{k}$ می‌باشد بنابراین:

$$\dot{\hat{n}} = \vec{\omega} \times \hat{n} = \dot{\theta} \hat{k} \times \hat{n} = -\dot{\theta} \hat{t} \rightarrow \boxed{\dot{\hat{n}} = -\dot{\theta} \hat{t}}$$

$$\dot{\hat{t}} = \vec{\omega} \times \hat{t} = \dot{\theta} \hat{k} \times \hat{t} = \dot{\theta} \hat{n} \rightarrow \boxed{\dot{\hat{t}} = \dot{\theta} \hat{n}}$$

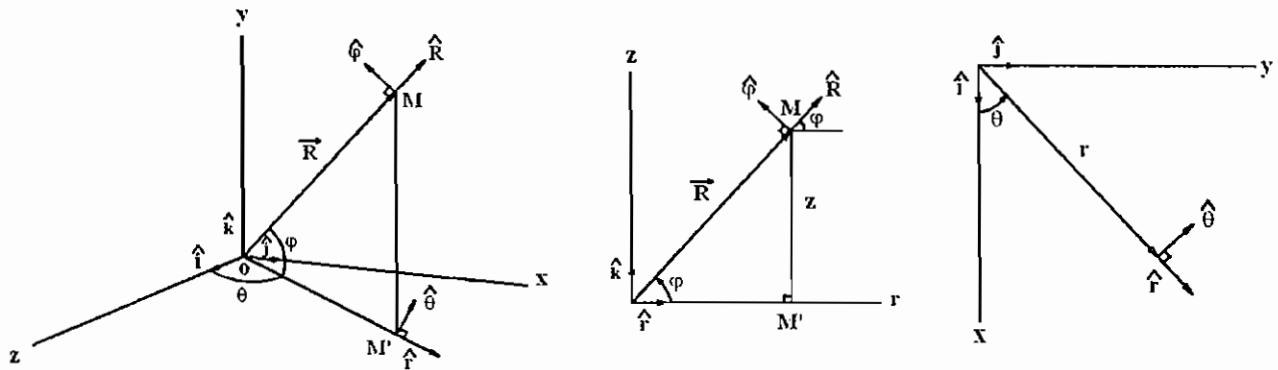
$$\vec{a} = \dot{\vec{v}}_t = \dot{v}_t \hat{t} + v_t \dot{\hat{t}} = \dot{v}_t \hat{t} + v_t (\dot{\theta} \hat{n}) = \dot{v}_t \hat{t} + \left(\frac{v_t^2}{\rho} \right) \hat{n} = \dot{v}_t \hat{t} + \frac{v_t^2}{\rho} \hat{n} = a_t \hat{t} + a_n \hat{n}$$

بنابراین در دستگاه مختصات قائم و مماسی مولفه‌های نرمال و مماسی شتاب به ترتیب $a_t = \dot{v}_t$ و $a_n = \frac{v_t^2}{\rho}$ می‌باشند.

نکته ۱: مولفه‌های مماسی شتاب a_t ، نرخ زمانی تغییر اندازه سرعت ذره را نشان می‌دهد و اگر اندازه سرعت ثابت باشد این مولفه صفر خواهند بود.

نکته ۲: مولفه نرمال شتاب، a_n ناشی از تغییرات جهت سرعت می‌باشد و اندازه آن از رابطه $a_n = \frac{v_t^2}{\rho}$ محاسبه می‌شود بدیهی است که اگر مسیر حرکت یک خط راست باشد، شعاع انحنای مسیر بی‌نهایت خواهد بود و لذا شتاب نرمال صفر خواهد بود.

د - دستگاه مختصات کروی (Spherical Coordinates):



در این دستگاه مختصات مختصه‌ها (R, θ, ϕ) هستند. بردارهای یک‌ه این دستگاه $\hat{R}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$ هستند که با حرکت ذره از یک نقطه به نقطه دیگر تغییر می‌کنند، لذا نسبت به زمان مشتق دارند و این مشتقات از رابطه $\dot{\hat{\lambda}} = \vec{\omega} \times \hat{\lambda}$ محاسبه می‌شوند. در این دستگاه $\dot{\hat{R}} = \vec{\omega} \times \hat{R} = (\dot{\theta} \hat{k} - \dot{\phi} \hat{\theta}) \times \hat{R} = \dot{\theta} (\hat{k} \times \hat{R}) - \dot{\phi} (\hat{\theta} \times \hat{R})$ می‌باشد، لذا:

از طرفی:

$$\hat{k} \times \hat{R} = |\hat{k}| |\hat{R}| \sin(\widehat{\hat{k}, \hat{R}}) \hat{\theta} = 1 \times 1 \sin(90^\circ - \phi) \hat{\theta} = (\cos \phi) \hat{\theta}$$

$$\hat{\theta} \times \hat{R} = -\hat{\phi}$$

با توجه به روابط بالا نتیجه می‌شود:

$$\dot{\hat{R}} = (\dot{\theta} \cos \phi) \hat{\theta} + \dot{\phi} \hat{\phi}$$

$$\dot{\hat{\theta}} = \vec{\omega} \times \hat{\theta} = (\dot{\theta} \hat{k} - \dot{\phi} \hat{\theta}) \times \hat{\theta} = \dot{\theta} \hat{k} \times \hat{\theta} - \dot{\phi} \hat{\theta} \times \hat{\theta} = -\dot{\theta} \hat{r}$$

ما معمولاً مشتقات بردارهای یک‌ه در یک دستگاه را بر حسب بردارهای یک‌ه در آن دستگاه بیان می‌کنیم بنابراین می‌بایستی \hat{r} را نیز بر حسب بردارهای یک‌ه دستگاه مختصات کروی بیان کنیم. مطابق شکل‌های قبل زاویه بردار یک‌ه \hat{r} با بردارهای یک‌ه $\hat{\theta}, \hat{\phi}$ به ترتیب $-\phi$ و $-(\frac{\pi}{2} + \phi)$ می‌باشند. بنابراین $\hat{\theta}$ به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\hat{r} = \cos(-\phi) \hat{R} + \hat{\phi} \cos\left(-\frac{\pi}{2} - \phi\right) = (\cos \phi) \hat{R} - (\sin \phi) \hat{\phi} \rightarrow \dot{\hat{\theta}} = -(\dot{\theta} \cos \phi) \hat{R} + (\dot{\theta} \sin \phi) \hat{\phi}$$

$$\dot{\hat{\phi}} = \vec{\omega} \times \hat{\phi} = (\dot{\theta} \hat{k} - \dot{\phi} \hat{\theta}) \times \hat{\phi} = \dot{\theta} \hat{k} \times \hat{\phi} - \dot{\phi} \hat{\theta} \times \hat{\phi}$$

از طرفی

$$\hat{k} \times \hat{\phi} = |\hat{k}| |\hat{\phi}| \sin(\widehat{\hat{k}, \hat{\phi}}) (-\hat{\theta}) = 1 \times 1 \sin \phi (-\hat{\theta}) = -(\sin \phi) \hat{\theta}$$

$$\hat{\theta} \times \hat{\phi} = \hat{R}$$

و بنابراین نتیجه می‌شود:

$$\dot{\hat{\phi}} = -(\dot{\theta} \sin \phi) \hat{\theta} - \dot{\phi} \hat{R}$$

بردار موقعیت در این دستگاه عبارت است از:

$$\vec{R} = R \hat{R}$$

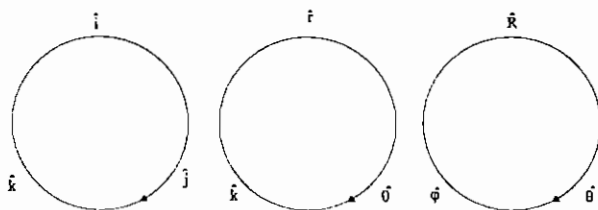
$$\vec{v} = \dot{\vec{R}} = \dot{R} \hat{R} + R \dot{\hat{R}} = \dot{R} \hat{R} + R \left[(\dot{\theta} \cos \varphi) \hat{\theta} + \dot{\varphi} \hat{\phi} \right]$$

بردار سرعت به صورت زیر به دست می آید.

$$\Rightarrow \vec{v} = \dot{R} \hat{R} + (R \cos \varphi) \dot{\theta} \hat{\theta} + R \dot{\varphi} \hat{\phi} = v_R \hat{R} + v_\theta \hat{\theta} + v_\varphi \hat{\phi}$$

بنابراین مولفه های سرعت در این دستگاه $v_R = \dot{R}$ و $v_\theta = (R \cos \varphi) \dot{\theta} = r \dot{\theta}$ و $v_\varphi = R \dot{\varphi}$ می باشند. به دلیل طولانی بودن روابط مربوط به مولفه های شتاب از ارایه آنها خودداری می شود.

نکته: حاصل ضرب خارجی بردارهای یک به هر سه دستگاه مختصات دکارتی، استوانه ای و کروی می تواند با توجه به اشکال زیر به دست آیند حاصل ضرب خارجی هر دو بردار یک به اگر از بردار اول به سمت بردار دوم کوتاه ترین مسیر روی دایره طی شود در جهت فلش برابر بردار یک به سوم و در خلاف جهت فلش برابر منفی بردار سوم می باشد.



جمع بندی:

دستگاه مختصات کروی	دستگاه مختصات استوانه ای (در حالت خاص قطبی)	دستگاه مختصات قائم و مماسی	دستگاه مختصات دکارتی	
$\hat{R}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$ R, θ, φ	$\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{k}$ r, θ, z	\hat{n}, \hat{t} ρ, θ	$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ x, y, z	بردارهای یک به و مختصات
$\dot{\vec{R}} = (\dot{\theta} \cos \varphi) \hat{\theta} + \dot{\varphi} \hat{\phi}$ $\dot{\hat{\theta}} = -(\dot{\theta} \cos \varphi) \hat{R} + (\dot{\theta} \sin \varphi) \hat{\phi}$ $\dot{\hat{\phi}} = -\dot{\varphi} \hat{R} - (\dot{\theta} \sin \varphi) \hat{\theta}$	$\dot{\hat{r}} = \dot{\theta} \hat{\theta}$ $\dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta} \hat{r}$ $\dot{\hat{k}} = 0$	$\dot{\hat{n}} = -\dot{\theta} \hat{t}$ $\dot{\hat{t}} = \dot{\theta} \hat{n}$	$\dot{\hat{i}} = 0$ $\dot{\hat{j}} = 0$ $\dot{\hat{k}} = 0$	مشتقات بردارهای یک به
$v_R = \dot{R}$ $v_\theta = (R \cos \varphi) \dot{\theta} = r \dot{\theta}$ $v_\varphi = R \dot{\varphi}$	$v_r = \dot{r}$ $v_\theta = r \dot{\theta}$ $v_z = \dot{z}$	$v_t = \rho \dot{\theta}$	$v_x = \dot{x}$ $v_y = \dot{y}$ $v_z = \dot{z}$	مولفه های سرعت
$a_R = \dots$ $a_\theta = \dots$ $a_\varphi = \dots$	$a_r = \ddot{r} - r \dot{\theta}^2$ $a_\theta = r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}$ $a_z = \ddot{z}$	$a_n = \frac{v_t^2}{\rho}$ $a_t = \dot{v}_t$	$a_x = \ddot{x}$ $a_y = \ddot{y}$ $a_z = \ddot{z}$	مولفه های شتاب
$\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{k} - \dot{\varphi} \hat{\theta}$	$\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{k}$	$\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{k}$	-	بردارهای سرعت زاویه ای

تست نمونه

تست سال (۷۰ - ۶۹)

در مسیر دایره‌ای شکل حرکت یک هواپیما هنگام مانور در نقطه A شتاب کل هواپیما برابر $20 \left[\frac{m}{s^2} \right]$ است. اگر سرعت هواپیما $720 \left[\frac{km}{h} \right]$ باشد و با نرخ 36 کیلومتر در ساعت افزایش یابد، شعاع مسیر در نقطه A برابر است با:

(۱) 4200 m (۲) 2310 m (۳) 5300 m (۴) هیچ کدام

$$v_t = 720 \left[\frac{km}{h} \right] = \frac{720}{3.6} \left[\frac{m}{s} \right] = 200 \left[\frac{m}{s} \right]$$

از آنجایی که نرخ تغییر اندازه سرعت 36 کیلومتر در ساعت می‌باشد با ثابت فرض کردن این نرخ نسبت به زمان می‌توان گفت که

$$a_t = \dot{v}_t = 10 \left[\frac{m}{s^2} \right] \quad \text{متر در ثانیه افزایش می‌یابد و یا:} \quad \frac{36}{3.6} = 10$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = 20 \Rightarrow \left(\frac{v_t^2}{\rho} \right)^2 + 10^2 = 20^2 \Rightarrow \left(\frac{(200)^2}{\rho} \right)^2 = 300 \Rightarrow \rho^2 = \frac{200^4}{300}$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{(200)^2}{10\sqrt{3}} \approx 2310 m$$

جواب گزینه (۲) می‌باشد.

تست سال (۷۵ - ۷۴)

متحرکی با سرعت اولیه صفر در مسیر دایره‌ای به شعاع R شروع به حرکت می‌کند، اگر شتاب مماسی a_t متحرک a_0 فرض شود، مقدار شتاب کل متحرک پس از طی یک دور کامل مسیر چقدر می‌باشد؟

(۱) 0 (۲) $a_0 \sqrt{1+4\pi^2}$ (۳) $4\pi a$ (۴) $a_0 \sqrt{1+16\pi^2}$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{\left(\frac{v^2}{R} \right)^2 + a_0^2}$$

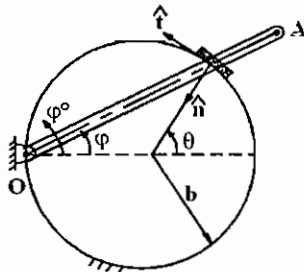
$$v^2 - v_0^2 = 2a_t s \Rightarrow v^2 - 0^2 = 2a_0 (2\pi R) \Rightarrow v^2 = 4\pi R a_0 \Rightarrow v = \sqrt{4\pi R a_0}$$

$$a = \sqrt{\left(\frac{4\pi R a_0}{R} \right)^2 + a_0^2} = a_0 \sqrt{1+16\pi^2}$$

جواب گزینه (۴) می‌باشد.

تست سال (۷۸ - ۷۴)

مهره کوچک P بر روی مسیر دایره‌ای شکل ثابت به شعاع b حرکت می‌کند. میله OA از مهره P عبور کرده و حول نقطه ثابت O بر روی حلقه با سرعت زاویه‌ای $\dot{\phi}$ دوران می‌کند. اگر ϕ ثابت باشد سرعت و شتاب P را به دست آورید.



$$\vec{a}_P = 2b\dot{\phi}^2 \hat{n} \text{ و } \vec{v}_P = b\dot{\phi} \hat{t} \quad (۱)$$

$$\vec{a}_P = 4b\dot{\phi}^2 \hat{n} \text{ و } \vec{v}_P = 2b\dot{\phi} \hat{t} \quad (۲)$$

$$\vec{a}_P = b\dot{\phi}^2 \hat{n} \text{ و } \vec{v}_P = b\dot{\phi} \hat{t} \quad (۳)$$

$$\vec{a}_P = \frac{b\dot{\phi}}{2} \hat{n} \text{ و } \vec{v}_P = b\dot{\phi} \hat{t} \quad (۴)$$

$$v_t = r\dot{\theta} \Rightarrow (v_t)_P = b\dot{\theta} \xrightarrow{\theta=2\phi} (v_t)_P = 2b\dot{\phi} \Rightarrow \vec{v}_P = 2b\dot{\phi} \hat{t}$$

$$(\ddot{\theta}=2\ddot{\phi}=0 \Leftarrow \phi \text{ ثابت است}) \Rightarrow (a_t)_P = \dot{v}_t = b\ddot{\theta} = 0$$

$$(a_n)_P = \frac{v_t^2}{\rho} = \frac{(2b\dot{\phi})^2}{b} = 4b\dot{\phi}^2 \Rightarrow \vec{a}_P = 4b\dot{\phi}^2 \hat{n} \Rightarrow$$

جواب گزینه (۲) می‌باشد.

تست سال (۷۳ - ۷۲)

نقطه مادی با سرعت ثابت V در امتداد منحنی فضایی $x=\cos\theta$ و $y=\sin\theta$ و $z=\theta$ حرکت می‌کند. مقدار شتاب نقطه مادی برابر است با:

$$V^2 \cos\theta \quad (۴)$$

$$\text{صفر} \quad (۳)$$

$$V^2 \quad (۲)$$

$$\frac{V^2}{2} \quad (۱)$$

از آنجایی که $x^2 + y^2 = 1$ می‌باشد لذا مسیر حرکت نقطه مادی یک منحنی مارپیچ بر روی سطح استوانه‌ای به شعاع واحد می‌باشد.

$$\begin{cases} v_x = \dot{x} = -\dot{\theta} \sin\theta \\ v_y = \dot{y} = \dot{\theta} \cos\theta \Rightarrow V = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{2} \dot{\theta} = \text{const} \Rightarrow \dot{\theta} = \text{const} \Rightarrow \ddot{\theta} = 0 \\ v_z = \dot{z} = \dot{\theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_x = \ddot{x} = -\dot{\theta}^2 \cos\theta \\ a_y = \ddot{y} = -\dot{\theta}^2 \sin\theta \Rightarrow a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \dot{\theta}^2 = \left(\frac{V}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{V^2}{2} \\ a_z = \ddot{z} = \ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

جواب گزینه (۱) می‌باشد.

ذره p در مسیر مارپیچی که دور سطح یک مخروط قائم دایروی به شعاع قاعده b و ارتفاع h پیچیده شده است به سمت پائین حرکت می‌کند. γ زاویه بین مماس افقی بر مخروط در هر نقطه و مماس بر مسیر در هر نقطه ثابت است و حرکت ذره طوری است که $\dot{\theta}$ ثابت است. معادلات پارامتری مسیر عبارتند از:

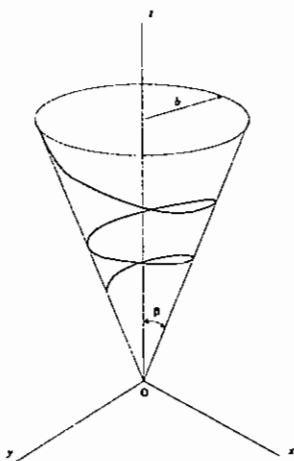
$$z = h e^{-(\dot{\theta} \cos \beta \cot \gamma) t} \quad (۴)$$

$$z = h e^{-(\dot{\theta} \sin \beta \cot \gamma) t} \quad (۳)$$

$$z = h e^{-(\dot{\theta} \cos \beta \tan \gamma) t} \quad (۲)$$

$$z = h e^{-(\dot{\theta} \sin \beta \tan \gamma) t} \quad (۱)$$

حل:



در مختصات استوانه‌ای برای مخروط داریم: $\frac{r}{z} = \tan \beta$

$$r = z \tan \beta$$

اگر \vec{v} سرعت کل ذره باشد زاویه بین مماس بر مسیر یعنی \bar{v} و بردار $\hat{\theta}$ (که مماس افقی بر مخروط است) همواره γ می‌باشد. لذا داریم:

$$v_{\theta} = v \cos \gamma$$

$$\begin{cases} u_r = \dot{r} = \dot{z} \tan \beta \\ v_{\theta} = r\dot{\theta} = z\dot{\theta} \tan \beta \\ v_z = \dot{z} \end{cases} \Rightarrow v = \sqrt{v_r^2 + v_{\theta}^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{z}^2 (1 + \tan^2 \beta) + z^2 \dot{\theta}^2 \tan^2 \beta}$$

$$\Rightarrow v^2 \cos^2 \gamma = [\dot{z}^2 (1 + \tan^2 \beta) + z^2 \dot{\theta}^2 \tan^2 \beta] \cos^2 \gamma = v_{\theta}^2 = z^2 \dot{\theta}^2 \tan^2 \beta \Rightarrow$$

$$\frac{\dot{z}^2 \cos^2 \gamma}{\cos^2 \beta} = z^2 \dot{\theta}^2 \tan^2 \beta \sin^2 \gamma \Rightarrow \dot{z}^2 \cos^2 \gamma = z^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \beta \sin^2 \gamma \Rightarrow$$

$$\dot{z} \cos \gamma = -z \dot{\theta} \sin \beta \sin \gamma \quad \text{چون } z \text{ کم می‌شود}$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{z}}{z} = -\dot{\theta} \sin \beta \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} = -\dot{\theta} \sin \beta \tan \gamma \Rightarrow \int_h^z \frac{dz}{z} = -\dot{\theta} \sin \beta \tan \gamma \int_0^t dt \Rightarrow$$

لذا جواب گزینه ۱ می‌باشد.

$$z = h e^{-(\dot{\theta} \sin \beta \tan \gamma) t}$$

تست سال (۷۷ - ۷۶)

مشتق زمانی بردار یکه (واحد) $\frac{d\hat{R}}{dt} = \dot{\hat{R}}$ در مختصات کروی (R, θ, ϕ) مساوی است با:

$$\begin{aligned} (1) \quad & (\dot{\theta} \cos \phi) \hat{\theta} + \dot{\phi} \hat{\phi} \\ (2) \quad & (\dot{\theta} \sin \phi) \hat{\phi} - (\dot{\theta} \cos \phi) \hat{R} \end{aligned}$$

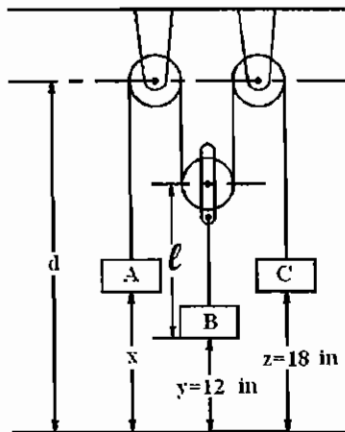
$$\begin{aligned} (3) \quad & -(\dot{\theta} \sin \phi) \hat{\phi} - (\dot{\theta} \cos \phi) \hat{R} \\ (4) \quad & (\dot{\theta} \sin \phi) \hat{\theta} - (\dot{\phi} \cos \theta) \hat{\phi} \end{aligned}$$

با توجه به جدول ارائه شده در بخش قبل جواب گزینه (۱) می‌باشد.

مسائل مربوط به قرقره‌ها

تست سال (۷۲ - ۷۱)

با دانستن این که بلوک‌های B , C یک ثانیه بعد از حرکت از حالت سکون پشت سرهم به زمین می‌خورند، شتاب A را به دست آورید.



$$3.5 \frac{\text{ft}}{\text{s}^2} \quad (۲)$$

$$7 \frac{\text{ft}}{\text{s}^2} \quad (۱)$$

$$13.5 \frac{\text{ft}}{\text{s}^2} \quad (۴)$$

$$10.5 \frac{\text{ft}}{\text{s}^2} \quad (۳)$$

$$y = \frac{1}{2} a_B t^2 \Rightarrow 12 = \frac{1}{2} a_B (1)^2 \Rightarrow a_B = 24 \left[\frac{\text{in}}{\text{s}^2} \right] = \ddot{y}$$

$$z = \frac{1}{2} a_C t^2 \Rightarrow 18 = \frac{1}{2} a_C (1)^2 \Rightarrow a_C = 36 \left[\frac{\text{in}}{\text{s}^2} \right] = \ddot{z}$$

$$\text{طول ریسمان} = (d - x) + 2(d - y - \ell) + (d - z) + \text{constant}$$

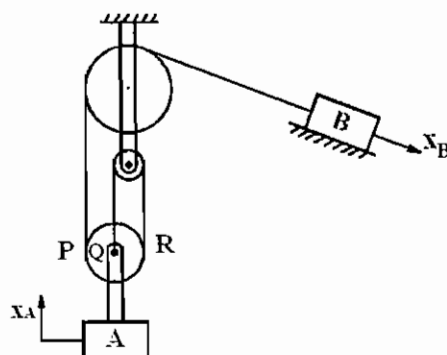
با مشتق‌گیری از رابطه بالا نسبت به زمان نتیجه می‌شود.

$$\begin{cases} \dot{x} + 2\dot{y} + \dot{z} = 0 \Rightarrow v_A + 2v_B + v_C = 0 \\ \ddot{x} + 2\ddot{y} + \ddot{z} = 0 \Rightarrow a_A + 2a_B + a_C = 0 \Rightarrow a_A = -2 \times 24 - 36 = -84 \left[\frac{\text{in}}{\text{s}^2} \right] = -7 \left[\frac{\text{ft}}{\text{s}^2} \right] \end{cases}$$

جواب گزینه (۱) می‌باشد.

تست سال (۶۸ - ۶۷)

در سیستم داده شده در شکل مقابل رابطه سرعت وزنه A (v_A به طرف بالا) و وزنه B (v_B به طرف پایین) عبارت است از:



$$v_B = 3v_A \quad (۲)$$

$$v_B = 2v_A \quad (۱)$$

$$v_B = \frac{4}{3}v_A \quad (۴)$$

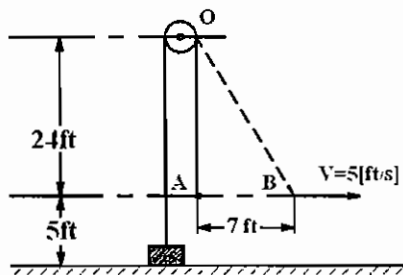
$$v_B = 2v_A \quad (۳)$$

هنگامی که وزنه A به اندازه x_A بالا می‌رود نقاط P, Q, R به اندازه x_A بالا می‌روند و به نقاط P', Q', R' تبدیل می‌شوند، به طوری که $PP' = QQ' = RR' = x_A$ در اثر این عمل به اندازه $3x_A$ از طول ریسمان آزاد می‌شود و لذا وزنه B به اندازه $x_B = 3x_A$ پایین می‌آید بنابراین

$$x_B = 3x_A \Rightarrow \dot{x}_B = 3\dot{x}_A \Rightarrow v_B = 3v_A$$

جواب گزینه (۲) می‌باشد.

تست سال (۷۰ - ۶۹)



وزنه‌ای به انتهای طنابی به طول 53 [ft] متصل شده و انتهای دیگر آن به وسیله شخصی در ارتفاع 5 [ft] از سطح زمین نگه‌داری شده است. اگر شخص با سرعت ثابت $5 \left[\frac{\text{ft}}{\text{s}} \right]$ شروع به حرکت کند، هنگامی که او به اندازه 7 [ft] مستقیماً از زیر قرقه دور شده است. سرعت بالا رفتن وزنه تقریباً برابر است با:

- (۱) $1 \left[\frac{\text{ft}}{\text{s}} \right]$ (۲) $1.4 \left[\frac{\text{ft}}{\text{s}} \right]$ (۳) $2.5 \left[\frac{\text{ft}}{\text{s}} \right]$ (۴) $3.6 \left[\frac{\text{ft}}{\text{s}} \right]$

$$AB = x, \quad OB = s$$

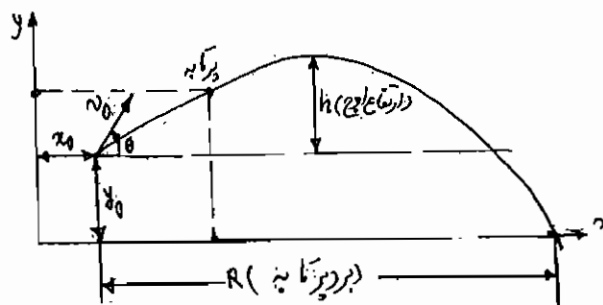
اگر فرض کنیم شخص مسافت x را طی کرده باشد داریم:

$$OB^2 = OA^2 + AB^2 \Rightarrow s^2 = 24^2 + x^2 \Rightarrow 2s\dot{s} = 2x\dot{x} \Rightarrow \dot{s} = \dot{x} = v \Rightarrow \dot{s} = \frac{5x}{s} = \frac{5x}{\sqrt{24^2 + x^2}}$$

که در آن \dot{s} سرعت افزایش طول OB (s) و یا سرعت بالا رفتن وزنه می‌باشد، لذا داریم:

$$\dot{s} \Big|_{x=7} = \frac{5 \times 7}{\sqrt{24^2 + 7^2}} = \frac{35}{25} = \frac{7}{5} \left[\frac{\text{ft}}{\text{s}} \right] = 1.4 \left[\frac{\text{ft}}{\text{s}} \right]$$

جواب گزینه (۲) می‌باشد.



حرکت پرتابه را می‌توان به دو حرکت تفکیک نمود. نخست حرکت سایه آن روی محور x که یک حرکت با سرعت ثابت $v_x = v_{0x} = v_0 \cos \theta$ می‌باشد. سپس می‌توان حرکت سایه عمودی آن که یک حرکت سقوط آزاد با سرعت اولیه $v_{0y} = v_0 \sin \theta$ و شتاب جاذبه $-g$ می‌باشد در نظر گرفت. بنابراین

$$\begin{cases} \dot{x} = (v_0 \cos \theta) + x_0 \\ y = -g \frac{t^2}{2} + (v_0 \sin \theta)t + y_0 \Rightarrow v_y = \dot{y} = -gt + v_0 \sin \theta \end{cases}$$

با حذف زمان t در معادلات بالا معادله مسیر پرتابه که یک سهمی است به دست می‌آید

$$y = \frac{-g(x-x_0)^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta} + (\tan \theta)(x-x_0) + y_0$$

و برد پرتابه با توجه به رابطه بالا از حل معادله درجه دوم زیر به دست آوردن جواب حقیقی مثبت آن حاصل می گردد.

$$-(g/2v_0^2 \cos^2 \theta)R^2 + R \tan \theta + y_0 = 0$$

پرتابه در هنگام رسیدن به ارتفاع اوج دارای $v_y = 0$ بوده و یا در زمان $t = \frac{v_0 \sin \theta}{g}$ به ارتفاع اوج می رسد لذا ارتفاع اوج برابر است با:

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

رابطه بین سرعت ها و شتاب های اجرام A و B و C چیست؟

$$2a_A + a_B + 4a_C = 0 \quad (۲)$$

$$2a_A + 2a_B + 4a_C = 0 \quad (۱)$$

$$a_A + 2a_B + 4a_C = 5 \quad (۴)$$

(۳) هیچ کدام

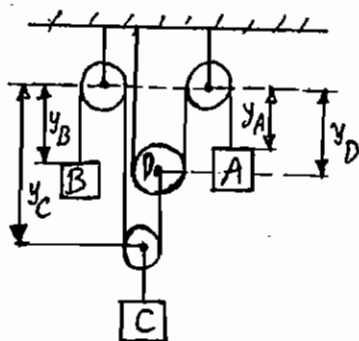
حل:

مقدار ثابت $\ell_1 = y_B + y_C + (y_C - y_D) +$ (طول طناب اول)

مقدار ثابت $\ell_2 = 2y_D + y_A +$ (طول طناب دوم)

از روابط بالا نسبت به زمان مشتق می گیریم:

$$\begin{cases} \dot{y}_B = 2\dot{y}_C - \dot{y}_D = 0 \\ 2\dot{y}_D + \dot{y}_A = 0 \end{cases}$$



دو برابر رابطه را با دوم جمع می کنیم:

$$2\dot{y}_B + 4\dot{y}_C + \dot{y}_A = 0 \quad \leftarrow \quad 2\dot{y}_B + 4\dot{y}_C + \dot{y}_A = 0$$

$$2\dot{y}_B + 4\dot{y}_C + \dot{y}_A = 0 \rightarrow 2a_B + 4a_C + a_A = 0$$

لذا جواب گزینه ۴ می باشد.

تست سال (۶۸ - ۶۷)

ذره ای مادی به جرم m از نقطه ای مرتفع نسبت به سطح زمین پرتاب می شود (به طور افقی) فاصله افقی طی شده توسط این ذره s_1 اندازه گیری می شود. اگر شتاب ثقل کره ماه $\frac{1}{6}$ شتاب ثقل کره زمین فرض شود و این ذره از نقطه ای مشابه در سطح ماه به طور افقی

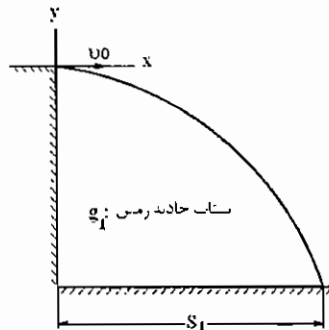
با سرعت برابر پرتاب شود فاصله افقی s_2 طی شده با s_1 چه رابطه ای دارد؟

(۴) هیچ کدام

$$s_2 = \frac{s_1}{6} \quad (۳)$$

$$s_2 = \sqrt{6} s_1 \quad (۲)$$

$$s_2 = 6s_1 \quad (۱)$$



مدت زمان لازم برای رسیدن به سطح زمین:

$$y = \frac{1}{2} g_1 t^2 \Rightarrow -h = \frac{-1}{2} g_1 t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g_1}}$$

$$s_1 = v_0 t = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g_1}}$$

به طور مشابه نتیجه می شود:

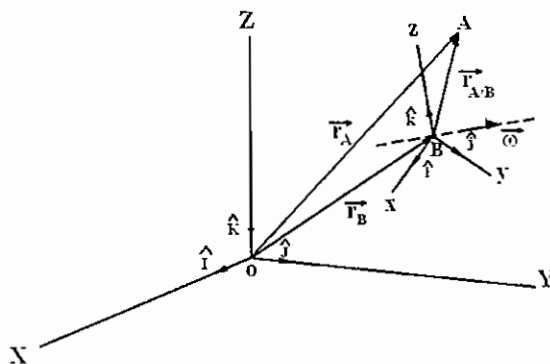
$$s_2 = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g_2}}$$

که در آن g_2 شتاب جاذبه در کره ماه می باشد و $g_2 = \frac{g_1}{6}$

$$\frac{s_2}{s_1} = \sqrt{\frac{g_1}{g_2}} = \sqrt{6} \Rightarrow s_2 = \sqrt{6} s_1$$

جواب گزینه (۲) می باشد.

رابطه سرعت ها و شتاب های نسبی و دستگاه های چرخان:



دستگاه مختصات ثابت OXYZ را در نظر می گیریم. فرض کنید دستگاه مختصات Bxyz به یک جسم صلب متصل شده و حول محور خط چین نشان با سرعت زاویه ای $\vec{\omega}$ دوران می کند. موقعیت ذره A نسبت به دستگاه مختصات چرخان Bxyz با بردار $\vec{r}_{A/B}$ مشخص می شود و نیز موقعیت اش نسبت به دستگاه مختصات ثابت OXYZ با بردار \vec{r}_A تعیین می شود. مطابق شکل داریم:

$$\vec{r}_A = \vec{r}_B + \vec{r}_{A/B} \Rightarrow \dot{\vec{r}}_A = \dot{\vec{r}}_B + \dot{\vec{r}}_{A/B}$$

از طرفی داریم $\vec{v}_A = \dot{\vec{r}}_A$ و $\vec{v}_B = \dot{\vec{r}}_B$ که \vec{v}_B و \vec{v}_A به ترتیب سرعت های مطلق نقاط A و B نسبت به دستگاه ثابت OXYZ هستند. بردار $\dot{\vec{r}}_{A/B}$ را با نماد $\vec{v}_{A/B}$ نشان می دهند و سرعت نسبی نقطه A نسبت به B می نامند. بنابراین نتیجه می شود:

$$\boxed{\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}} \quad \text{رابطه سرعت های مطلق و نسبی}$$

فرض کنید که مختصات نقطه A در دستگاه مختصات چرخان (x, y, z) و بردارهای یکه این دستگاه $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ باشند، در این صورت داریم:

$$\vec{r}_{A/B} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \Rightarrow \dot{\vec{r}}_{A/B} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k} + x\dot{\hat{i}} + y\dot{\hat{j}} + z\dot{\hat{k}}$$

نکته ای که باید بدان توجه داشت این است که چون دستگاه مختصات Bxyz دوران می کند لذا بردارهای یکه اش با گذشت زمان تغییر جهت می دهند و بنابراین نسبت به زمان مشتق دارند که این مشتقات عبارتند از:

$$\dot{\hat{i}} = \vec{\omega} \times \hat{i}$$

$$\dot{\hat{j}} = \vec{\omega} \times \hat{j}$$

$$\dot{\hat{k}} = \vec{\omega} \times \hat{k}$$

با جایگذاری روابط بالا در رابطه قبلی نتیجه می شود:

$$\vec{v}_{A/B} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k} + x(\vec{\omega} \times \hat{i}) + y(\vec{\omega} \times \hat{j}) + z(\vec{\omega} \times \hat{k}) = \vec{v}_{Rel} + \vec{\omega} \times (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) = \vec{v}_{Rel} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B}$$

که در آن $\vec{v}_{Rel} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$ می باشد و در مفهوم بردار سرعتی است که با ثابت فرض کردن دستگاه چرخان و تصور حرکت ذره A نسبت به B به دست می آید. بنابراین سرعت نسبی ذره A نسبت به دستگاه چرخان دارای دو ترم است. یک ترم (\vec{v}_{Rel}) ناشی از حرکت ذره A نسبت به دستگاه چرخان ثابت فرض شده می باشد و ترم دیگر آن $(\vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B})$ ناشی از دوران دستگاه چرخان نسبت به دستگاه ثابت می باشد. با مشتق گیری از رابطه سرعت های نسبی رابطه زیر حاصل می گردد

$$\dot{\vec{v}}_A = \dot{\vec{v}}_B + \dot{\vec{v}}_{A/B} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B}} \quad \text{رابطه شتاب های نسبی}$$

که در رابطه بالا $\vec{a}_{A/B} = \dot{\vec{v}}_{A/B}$ شتاب نسبی نقطه A نسبت به B نامیده می شود.

$$\begin{aligned} \vec{v}_{A/B} = \vec{v}_{Rel} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B} &\Rightarrow \vec{a}_{A/B} = \dot{\vec{v}}_{A/B} = \dot{\vec{v}}_{Rel} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{A/B} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_{A/B} \\ &= \dot{\vec{v}}_{Rel} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{A/B} + \vec{\omega} \times (\vec{v}_{Rel} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B}) \end{aligned}$$

از طرفی با توجه به تعریف \vec{v}_{Rel} و مشتقات بردارهای یکه دستگاه چرخان نتیجه می شود.

$$\begin{aligned} \vec{v}_{Rel} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k} &\Rightarrow \dot{\vec{v}}_{Rel} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k} + \dot{x}\dot{\hat{i}} + \dot{y}\dot{\hat{j}} + \dot{z}\dot{\hat{k}} \\ &= \vec{a}_{Rel} + \dot{x}(\vec{\omega} \times \hat{i}) + \dot{y}(\vec{\omega} \times \hat{j}) + \dot{z}(\vec{\omega} \times \hat{k}) = \vec{a}_{Rel} + \vec{\omega} \times (\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}) = \vec{a}_{Rel} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{Rel} \end{aligned}$$

که در آن $\vec{a}_{Rel} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}$ می باشد و در مفهوم بردار شتابی است که با ثابت فرض کردن دستگاه چرخان و تصور حرکت ذره A نسبت به B به دست می آید. با جایگذاری رابطه بالا در رابطه مربوط به $\vec{a}_{A/B}$ نتیجه می شود.

$$\vec{a}_{A/B} = \vec{a}_{Rel} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{A/B} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{Rel}$$

که در رابطه بالا ترم شتاب $\vec{a}_C = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{Rel}$ شتاب کریولیس (Coriolis) نامیده می شود و راجع به مفهوم آن در قسمت های بعدی درس توضیح داده خواهد شد.

جمع بندی:

$$\boxed{\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}}$$

$$, \quad \boxed{\vec{v}_{A/B} = \vec{v}_{Rel} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B}}$$

$$\boxed{\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B}}$$

$$, \quad \boxed{\vec{a}_{A/B} = \vec{a}_{Rel} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{A/B} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{Rel}}$$

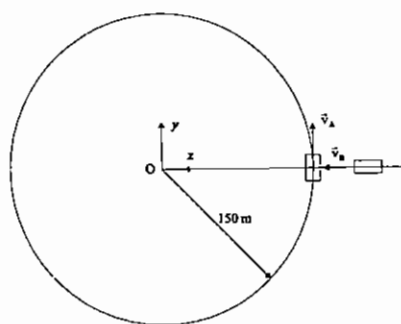
$$\vec{r}_{A/B} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\vec{v}_{Rel} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$$

$$\vec{a}_{Rel} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}$$

نکته: ناظر واقع در نقطه O اختلاف سرعت دو نقطه A و B را به صورت $\vec{v}_{A/B}$ و ناظر واقع در نقطه B و چسبیده به دستگاه مختصات Bxyz اختلاف سرعت این دو نقطه را به صورت \vec{v}_{Rel} احساس می نماید و از دید این دو ناظر این اختلاف سرعت یکسان نمی باشد مگر این که دستگاه Bxyz چرخان نباشد. همین مطلب در مورد اختلاف شتاب دو نقطه A و B از دید دو ناظر مذکور نیز صادق است.

تست نمونه



خودروی A با سرعت ثابت $54 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ پیچی به شعاع 150m را دور می‌زند. در لحظه نشان داده شده خودروی B دارای سرعت $81 \left[\frac{\text{km}}{\text{h}} \right]$ بوده و سرعتش را با میزان $3 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$ کاهش می‌دهد سرعت و شتاب A از دید B عبارتند از:

$$\vec{v}_{A/B} = 15\hat{i} - 22.5\hat{j} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right], \quad \vec{a}_{A/B} = 4.5\hat{i} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] \quad (۲)$$

$$\vec{v}_{A/B} = -15\hat{i} + 22.5\hat{j} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right], \quad \vec{a}_{A/B} = -4.5\hat{i} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] \quad (۱)$$

$$\vec{v}_{A/B} = 15\hat{j} + 22.5\hat{i} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right], \quad \vec{a}_{A/B} = -4.5\hat{i} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] \quad (۴)$$

$$\vec{v}_{A/B} = -15\hat{i} - 22.5\hat{j} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right], \quad \vec{a}_{A/B} = 4.5\hat{i} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] \quad (۳)$$

حل:

$$v_A = 54 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{54}{3.6} = 15 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

$$v_B = 81 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{81}{3.6} = 22.5 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

$$a_B = -3 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

$$\vec{v}_A = 15\hat{j}, \quad \vec{v}_B = -22.5\hat{i}, \quad \vec{a}_B = 3\hat{i}$$

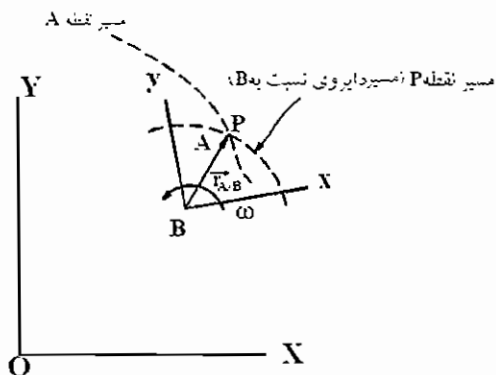
$$\begin{cases} a_A^t = 0 & \text{چون } v_A \text{ ثابت است} \\ a_A^n = \frac{v_A^2}{\rho} = \frac{(15)^2}{150} = 1.5 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] \Rightarrow \vec{a}_A = -1.5\hat{i} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] \end{cases}$$

$$\vec{v}_{A/B} = \vec{v}_A - \vec{v}_B = 15\hat{j} - (-22.5\hat{i}) = \boxed{15\hat{j} + 22.5\hat{i}} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

$$\vec{a}_{A/B} = \vec{a}_A - \vec{a}_B = -1.5\hat{i} - 3\hat{i} = \boxed{-4.5\hat{i}} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

لذا جواب گزینه ۴ می‌باشد.

مفهوم شتاب کریولیس:



برای نشان دادن مفهوم مولفه شتاب کریولیس حرکت دوبعدی (صفحه‌ای) در دستگاه مختصات ثابت OXY و چرخان Bxy نسبت به یکدیگر در نظر گرفته می‌شود. دو نقطه منطبق بر هم A و P را در لحظه نشان داده شده در نظر بگیرید که مسیر نقطه P نسبت به B یک مسیر دایروی به شعاع $r_{A/B}$ بوده و مسیر نقطه A یک مسیر دلخواه می‌باشد. در دستگاه قائم و مماسی نقطه P نسبت به B دارای دو مولفه شتاب نرمال و مماسی می‌باشد

که عبارتند از: $\vec{a}_{P/B}^n$ و $\vec{a}_{P/B}^t$

$$\left| \vec{a}_{P/B}^n \right| = \frac{(r_{A/B} \omega)^2}{r_{A/B}} = r_{A/B} \omega^2 = \left| \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B}) \right| \quad \text{و} \quad \omega = \omega \hat{k}, \quad \dot{\omega} = \dot{\omega} \hat{k}$$

$$\left| \vec{a}_{P/B}^t \right| = \frac{d}{dt} (r_{A/B} \omega) = r_{A/B} \dot{\omega} = \left| \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{A/B} \right|$$

جهت بردار $\vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B}$ عمود بر AB و در جهت ω و هم جهت $\vec{a}_{A/B}^t$ می‌باشد. جهت بردار $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B})$ از نقطه A به سمت B و یا در جهت $\vec{a}_{P/B}^n$ می‌باشد. بنابراین اندازه‌ها و جهت بردار $\vec{a}_{P/B}^n$ و $\vec{a}_{P/B}^t$ به ترتیب با اندازه‌ها و جهت بردارهای $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B})$ و $\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{A/B}$ یکسان می‌باشند.

و لذا نتیجه می‌شود:

$$\vec{a}_{P/B}^n = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B})$$

$$\vec{a}_{P/B}^t = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{A/B}$$

با توجه به رابطه شتاب‌های نسبی نتیجه می‌شود

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{Rel} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{A/B} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{Rel}$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{Rel} + \vec{a}_{P/B}^t + \vec{a}_{P/B}^n + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{Rel} \Rightarrow \vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{Rel} + \vec{a}_{P/B} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{Rel}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_A = \vec{a}_P + \vec{a}_{Rel} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{Rel} \Rightarrow \vec{a}_{A/P} = \vec{a}_A - \vec{a}_P = \vec{a}_{Rel} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{Rel}$$

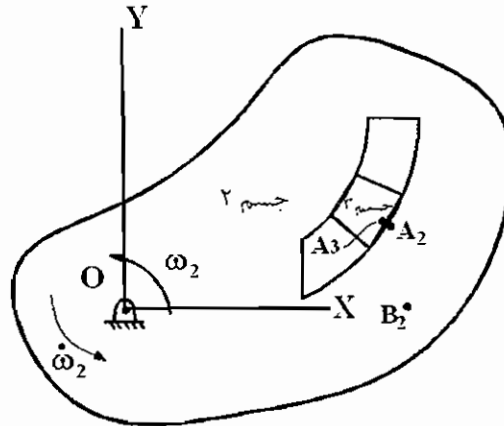
$$\left(\vec{a}_{A/P} \right)_{\text{دستگاه چرخان}} - \left(\vec{a}_{A/P} \right)_{\text{دستگاه غیر چرخان}} = \left(\vec{a}_{Rel} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{Rel} \right) - \vec{a}_{Rel} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{Rel} = \vec{a}_C$$

$$\Rightarrow \left(\vec{a}_{A/P} \right)_{\text{دستگاه چرخان}} = \left(\vec{a}_{A/P} \right)_{\text{دستگاه غیر چرخان}} + \vec{a}_C$$

در حقیقت شتاب کریولیس اختلاف شتاب نسبی دو نقطه A و P نسبت به یکدیگر است (که نقطه P در فاصله ثابت نسبت به مبدا مختصات چرخان می‌باشد ولی نقطه A فاصله‌اش نسبت به مبدا مختصات چرخان متغیر می‌باشد) هنگامی که این شتاب نسبی از دستگاه چرخان و غیر چرخان اندازه‌گیری می‌شود.

برای این که چرخش دستگاه معنا داشته باشد دستگاه Bxy به یک جسم صلب متصل می‌شود و چون نقطه P در فاصله ثابت نسبت به B قرار دارد، گویی این نقطه نیز بر جسم صلب مذکور واقع بوده و با دستگاه دوران می‌کند. حال اگر نقطه دیگری مانند A که بر این جسم صلب واقع نیست، در نظر گرفته شود بین شتاب نسبی این نقطه نسبت به نقطه P برای حالتی که جسم صلب موردنظر چرخان یا غیر چرخان باشد، تفاوت وجود دارد که این اختلاف در مفهوم مولفه شتاب کریولیس می‌باشد. برای روشن شدن موضوع یک مثال مربوط به یک مکانیزم صفحه‌ای مطرح می‌شود.

نخست دو نقطه A_2 و B_2 واقع بر جسم 2 در نظر گرفته می‌شود و دستگاه مختصات $A_2 \times y$ بر آن متصل می‌گردد. این دستگاه با سرعت زاویه‌ای ω_2 حول محور Z خواهد چرخید.



$$\vec{a}_{B_2} = \vec{a}_{A_2} + \vec{a}_{Rel} + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{B_2/A_2} + \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{B_2/A_2}) + 2\vec{\omega}_2 \times \vec{v}_{Rel}$$

چون دو نقطه A_2 و B_2 روی یک جسم صلب قرار دارند سرعت و شتاب نقطه B_2 نسبت به A_2 وقتی دستگاه $A_2 \times y$ ثابت فرض شود صفر خواهد بود و لذا داریم $\vec{a}_{Rel} = \vec{v}_{Rel} = \vec{0}$ و لذا رابطه بالا به صورت زیر ساده می‌شود.

$$\vec{a}_{B_2} = \vec{a}_{A_2} + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{B_2/A_2} + \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{B_2/A_2}) \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{B_2} = \vec{a}_{A_2} + \vec{a}_{B_2/A_2}^t + \vec{a}_{B_2/A_2}^n}$$

رابطه فوق رابطه‌ی آشنایی است که در درس دینامیک ماشین نیز مکرراً به کار می‌رود. همان‌طور که مشاهده کردیم دو نقطه A_2 و B_2 که روی یک جسم صلب قرار داشتند به هم دور و نزدیک نمی‌شوند لذا در راستای خط واصل بین این دو نقطه سرعت نسبی ندارد و بنابراین شتاب کریولیس صفر می‌باشد (شتاب کریولیس از دوران سرعت نسبی این دو نقطه در راستای خط واصل بین این دو نقطه به دست می‌آید).

حال دو نقطه A_3 و A_2 را در نظر گرفته می‌شود که نقطه A_3 بر جسم صلب 3 که یک لغزنده در داخل شیار جسم 2 می‌باشد و لذا:

$$\vec{r}_{A_3/A_2} = 0$$

$$\vec{a}_{A_3} = \vec{a}_{A_2} + \vec{a}_{Rel} + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{A_3/A_2} + \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{A_3/A_2}) + 2\vec{\omega}_2 \times \vec{v}_{Rel} \Rightarrow \vec{a}_{A_3} = \vec{a}_{A_2} + \vec{a}_{Rel} + 2\vec{\omega}_2 \times \vec{v}_{Rel}$$

اگر دستگاه $A_2 \times y$ ثابت فرض شود و سرعت و شتاب نقطه A_3 را نسبت به این دستگاه سنجیده شود \vec{a}_{Rel} و \vec{v}_{Rel} به دست می‌آیند که $\vec{v}_{Rel} = \vec{v}_{A_3/A_2}$ بردار سرعتی است که مماس بر مسیر شیار منحنی شکل می‌باشد و $\vec{a}_{Rel} = \vec{a}_{A_3/A_2}$ بردار شتابی است که دارای دو مولفه مماس و نرمال \vec{a}_{A_3/A_2}^n و \vec{a}_{A_3/A_2}^t می‌باشد از آنجایی که مسیر حرکت نقطه A_3 از شکل شیار منحنی شکل تبعیت می‌کند لذا \vec{a}_{A_3/A_2}^t مماس بر شیار و \vec{a}_{A_3/A_2}^n هم عمود بر شیار خواهد بود.

ترم $2\vec{\omega}_2 \times \vec{v}_{Rel}$ نیز با \vec{a}_{A_3/A_2}^c نمایش داده می‌شود و بدین ترتیب رابطه آشنایی که در درس دینامیک ماشین همواره به کار می‌رود نتیجه می‌شود.

$$\boxed{\vec{a}_{A_3} = \vec{a}_{A_2} + \vec{a}_{A_3/A_2}^n + \vec{a}_{A_3/A_2}^t + \vec{a}_{A_3/A_2}^c}$$

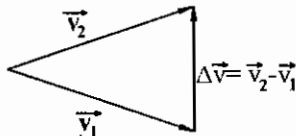
دو نقطه A_3 و A_2 در راستای شیار دارای سرعت نسبی \vec{v}_{A_3/A_2} هستند چرا که این دو نقطه نسبت به هم دور و نزدیک می‌شوند. از دوران این بردار سرعت نسبی ترم شتابی به دست می‌آید، که شتاب کریولیس نامیده می‌شود. سوالی که این‌جا مطرح است این است که چگونه دوران سرعت نسبی ایجاد شتاب می‌نماید. برای بررسی این موضوع روش‌های به دست آمدن شتاب را بررسی می‌شود.

الف) شتاب در اثر تغییر اندازه سرعت (ولی راستای سرعت ثابت می ماند):



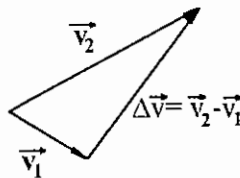
$$\bar{a}_{av} = \frac{\Delta \bar{v} = v_2 - v_1}{\Delta t} \quad \text{و} \quad \bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} \quad (\text{شتاب لحظه‌ای})$$

ب) شتاب در اثر تغییر راستای سرعت (ولی اندازه سرعت ثابت می ماند):



$$\bar{a}_{av} = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} \quad \text{و} \quad \bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} \quad (\text{شتاب لحظه‌ای})$$

ج) شتاب در اثر تغییر اندازه و راستای سرعت:



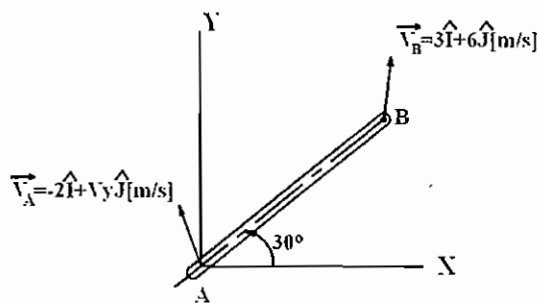
$$\bar{a}_{av} = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} \quad \text{و} \quad \bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} \quad (\text{شتاب لحظه‌ای})$$

بنابراین با توجه به موارد ذکر شده نتیجه می شود که در اثر تغییر اندازه \bar{v}_{A_3/A_2} و دوران \bar{v}_{A_3/A_2} بردار $\Delta \bar{v}_{A_3/A_2}$ به وجود می آید، که ترم شتابی به نام شتاب کریولیس به وجود می آورد.

تست سال (۷۸ - ۷۷)

میله AB روی سطحی افقی در حال حرکت است. سرعت نقاط A و B در لحظه t نشان داده شده است. مولفه سرعت v_y برای نقطه

A چند $\left[\frac{m}{s} \right]$ است؟



(۱) -12.6

(۲) 6.6

(۳) 12.6

(۴) 14.7

روش اول: با فرض $AB = l$ داریم:

$$\bar{r}_{B/A} = (\ell \cos 30^\circ) \hat{i} + (\ell \sin 30^\circ) \hat{j} = \frac{\sqrt{3}}{2} \ell \hat{i} + \frac{\ell}{2} \hat{j}, \quad \bar{\omega} = \omega \hat{k}$$

چون فاصله نقاط A و B ثابت است، داریم: $\bar{v}_{Rel} = \bar{0}$ و در نتیجه:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{Rel} + \bar{\omega} \times \bar{r}_{B/A} = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \bar{r}_{B/A}$$

$$3\hat{i} + 6\hat{j} = -2\hat{i} + v_y \hat{j} + \omega \hat{k} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ell \hat{i} + \frac{\ell}{2} \hat{j} \right) = -2\hat{i} + v_y \hat{j} + \frac{\sqrt{3}}{2} \ell \omega \hat{j} - \frac{\ell}{2} \omega \hat{i}$$

$$= (-2 - \frac{\ell}{2}\omega) \hat{i} + (v_y + \frac{\sqrt{3}}{2}\ell\omega) \hat{j} \Rightarrow \begin{cases} 3 = -2 - \frac{\ell}{2}\omega \Rightarrow \ell\omega = -10 \\ v_y + \frac{\sqrt{3}}{2}\ell\omega = 6 \Rightarrow v_y = 6 + 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6 + 5\sqrt{3} = 14.7 \left[\frac{m}{s}\right] \end{cases}$$

جواب گزینه (۴) می باشد.

روش دوم:

$$AB \text{ در راستای } \vec{v}_A \text{ اندازه مولفه سرعت } (v_A)_{AB} = \vec{v}_A \cdot \hat{\lambda}_{AB} = (-2\hat{i} + v_y\hat{j}) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j}\right) = -\sqrt{3} + \frac{v_y}{2}$$

$$AB \text{ در راستای } \vec{v}_B \text{ اندازه مولفه سرعت } (v_B)_{AB} = \vec{v}_B \cdot \hat{\lambda}_{AB} = (3\hat{i} + 6\hat{j}) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + 3$$

که روابط بالا $\hat{\lambda}_{AB} = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}$ همان برداریکه در راستای AB می باشد. دو مولفه $(v_A)_{AB}$ و $(v_B)_{AB}$ می بایستی با هم برابر باشند، چرا

که در غیر این صورت میله AB کشش خواهد آمد و یا فشرده خواهد شد که این فرض خلاف صلب بودن میله AB است پس:

$$(v_A)_{AB} = (v_B)_{AB} \Rightarrow -\sqrt{3} + \frac{v_y}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} + 3 \Rightarrow v_y = 6 + 5\sqrt{3} = 14.7 \left[\frac{m}{s}\right]$$

اگر مولفه های سرعت \vec{v}_B و \vec{v}_A را در راستای عمود بر AB به ترتیب $(v_B)_{AB}^\perp$ و $(v_A)_{AB}^\perp$ بنامیم رابطه زیر حاصل می گردد:

$$\omega_{AB} = \frac{\left| \begin{pmatrix} \perp \\ v_B \end{pmatrix}_{AB} - \begin{pmatrix} \perp \\ v_A \end{pmatrix}_{AB} \right|}{\ell} \quad (\text{سرعت زاویه ای میله AB})$$

اگر مولفه های شتاب \vec{a}_B و \vec{a}_A در راستای عمود بر AB نیز به ترتیب $(a_B)_{AB}^\perp$ و $(a_A)_{AB}^\perp$ باشند، نتیجه می شود:

$$\alpha_{AB} = \frac{\left| \begin{pmatrix} \perp \\ a_B \end{pmatrix}_{AB} - \begin{pmatrix} \perp \\ a_A \end{pmatrix}_{AB} \right|}{\ell} \quad (\text{شتاب زاویه ای میله AB})$$

قانون دوم نیوتن و اصل دالامبر:

مطابق قانون دوم نیوتن داریم: $\vec{F} = m\vec{a}$

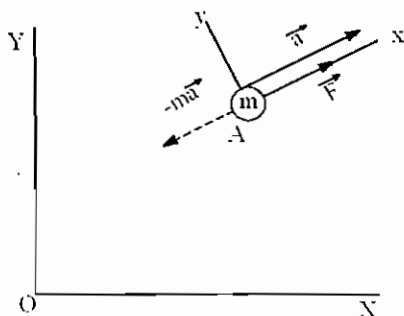
به عبارت دیگر اگر نیروی \vec{F} به ذره ای به جرم m وارد شود، ذره در جهت نیرو

شتابی می گیرید که برابر است با $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$.

حال اگر در دستگاه مختصات Axy متصل به ذره قرار بگیریم از دید ناظر واقع در این دستگاه ذره ساکن می باشد، لذا می بایستی جمع نیروهای وارده بر این ذره صفر شود دالامبر برای توجیه این تعادل نیروها، نیروی اینرسی $m\vec{a}$ را در جهت عکس \vec{F} به ذره وارد نمود (در شکل با خط چین نشان داده شده است). چون ذره در حال تعادل است جمع نیروها در جهت محور x صفر است. بنابراین داریم:

$$\vec{F} - m\vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{F} = m\vec{a}$$

که رابطه فوق با قانون دوم نیوتن سازگار است:



بنابراین مطابق اصل دالامبر اگر نیروی اینرسی $m\vec{a}$ را در جهت عکس به یک ذره در حال حرکت اعمال نماییم مساله دینامیک به یک مساله استاتیکی تبدیل شده و جمع نیروها وارد بر ذره صفر خواهد بود. این تعادل ساختگی را تعادل شبه استاتیکی می‌نامند. قانون دوم نیوتن در دستگاه مختصات دکارتی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{cases} \sum F_x = m a_x = m \ddot{x} \\ \sum F_y = m a_y = m \ddot{y} \\ \sum F_z = m a_z = m \ddot{z} \end{cases}$$

قانون دوم نیوتن در دستگاه مختصات استوانه‌ای عبارت است از:

$$\begin{cases} \sum F_r = m a_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \\ \sum F_\theta = m a_\theta = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \\ \sum F_z = m a_z = m \ddot{z} \end{cases}$$

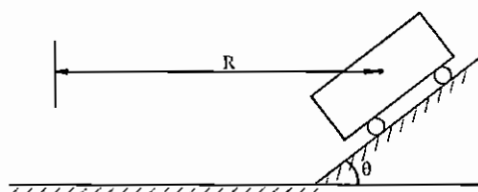
قانون دوم نیوتن در دستگاه قائم و مماسی عبارت است از:

$$\begin{cases} \sum F_n = m a_n = m \frac{v_t^2}{\rho} \\ \sum F_t = m a_t = m \dot{v}_t \end{cases}$$

مثال‌هایی از قانون دوم نیوتن و اصل دالامبر و قانون بقای انرژی:

تست سال (۷۶ - ۷۵)

یک اتومبیل وارد پیچی با شعاع R می‌شود، جاده دارای شیب θ می‌باشد. (مطابق شکل) ضریب اصطکاک بین چرخ‌ها و جاده μ است. مینیمم سرعت اتومبیل برای این که به طور جانبی به پایین سر نخورد چقدر است؟



$$\left[\frac{gR(\cos\theta - \mu\sin\theta)}{\cos\theta + \mu\sin\theta} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (۴) \quad \left[\frac{gR(\sin\theta - \mu\cos\theta)}{\cos\theta + \mu\sin\theta} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (۳) \quad \left[\frac{gR(\sin\theta + \mu\cos\theta)}{\cos\theta - \mu\sin\theta} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (۲) \quad \left[\frac{gR(\sin\theta + \mu\cos\theta)}{\sin\theta + \mu\cos\theta} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (۱)$$

مساله به دو حالت زیر تعمیم داده می‌شود:

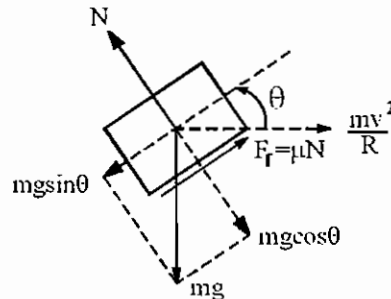
الف) مینیمم سرعت اتومبیل برای این که به طور جانبی به پایین سر نخورد چقدر است؟

ب) ماکزیمم سرعت اتومبیل برای این که به طور جانبی به بالا سر نخورد چقدر است؟

حل مساله: الف) در این حالت جسم تمایل به پایین رفتن دارد. لذا جهت نیروی اصطکاک F_f به سمت بالا می‌باشد.

دیگرام آزاد نیروهای وارد بر جرم m به صورت زیر می‌باشد.

طبق اصل دالامبر نیروی $\frac{mv^2}{R}$ در جهت عکس به جرم وارد شده و تعادل شبه استاتیکی ایجاد شده است.



$$\text{جمع نیروها در راستای موازی سطح شیبدار} = 0 \Rightarrow \mu N - mg \sin \theta + \frac{mv^2}{R} \cos \theta = 0$$

$$\text{جمع نیروها در راستای عمود بر سطح شیبدار} = 0 \Rightarrow N - mg \cos \theta - \frac{mv^2}{R} \sin \theta = 0 \Rightarrow N = m \left(g \cos \theta + \frac{v^2}{R} \sin \theta \right)$$

$$\Rightarrow \mu m \left(g \cos \theta + \frac{v^2}{R} \sin \theta \right) - mg \sin \theta + \frac{mv^2}{R} \cos \theta = 0 \Rightarrow \frac{v^2}{R} (\mu \sin \theta + \cos \theta) = g (\sin \theta - \mu \cos \theta)$$

$$\Rightarrow v = v_{\min} = \sqrt{\frac{g R (\sin \theta - \mu \cos \theta)}{\mu \sin \theta + \cos \theta}}$$

لذا جواب گزینه (۳) می‌باشد.

حل مساله: ب) در این حالت چون جسم تمایل به بالا رفتن دارد جهت نیروی اصطکاک F_f به سمت پایین می‌باشد.

$$\text{جمع نیروها در راستای موازی سطح شیبدار} = 0 \Rightarrow -\mu N - mg \sin \theta + m \frac{v^2}{R} \cos \theta = 0$$

$$\text{جمع نیروها در راستای عمود بر سطح شیبدار} = 0 \Rightarrow N - mg \cos \theta - \frac{mv^2}{R} \sin \theta = 0 \Rightarrow N = m \left(g \cos \theta + \frac{v^2}{R} \sin \theta \right)$$

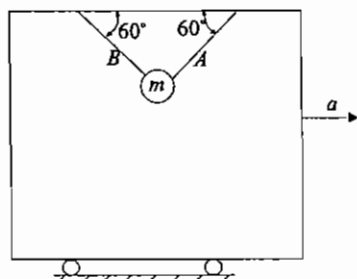
$$\Rightarrow -\mu m \left(g \cos \theta + \frac{v^2}{R} \sin \theta \right) - mg \sin \theta + m \frac{v^2}{R} \cos \theta = 0 \Rightarrow \frac{v^2}{R} (\cos \theta - \mu \sin \theta) = g (\sin \theta + \mu \cos \theta)$$

$$\Rightarrow v = v_{\max} = \sqrt{\frac{g R (\sin \theta + \mu \cos \theta)}{\cos \theta - \mu \sin \theta}}$$

مقایسه رابطه v_{\max} با v_{\min} نشان می‌دهد که در رابطه v_{\max} مخرج کسر کوچک‌تر و صورت کسر بزرگ‌تر از v_{\min} می‌باشد، لذا

$v_{\max} > v_{\min}$ یعنی نام‌گذاری v_{\max} و v_{\min} مناسب صورت گرفته است. اگر سرعت اتومبیل $v_{\min} \leq v \leq v_{\max}$ اتومبیل در پیچ از جاده خارج نمی‌شود.

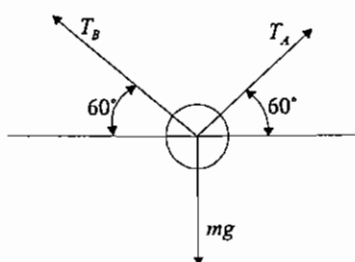
شتاب a چقدر باشد تا نیروی کشش در سیمان A دو برابر نیروی کشش در ریسمان B گردد.



$$\frac{\sqrt{3}}{9}g \quad (1) \quad \frac{\sqrt{3}}{3}g \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{6}g \quad (3) \quad \text{هیچکدام} \quad (4)$$

حل: گزینه ۱ صحیح می باشد.

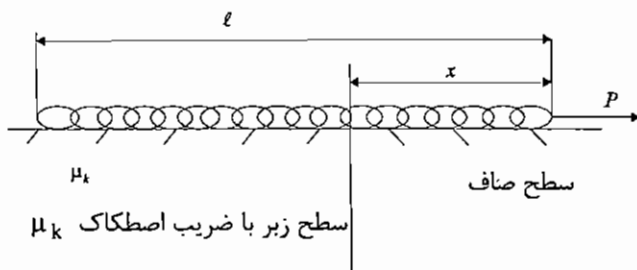


$$\sum F_y = 0 \rightarrow T_A \sin 60 + T_B \sin 60 - mg = 0$$

$$T_A + T_B = \frac{2\sqrt{3}mg}{3} \quad T_A = 2T_B \rightarrow 3T_B = \frac{2\sqrt{3}mg}{3} \Rightarrow T_B = \frac{2\sqrt{3}mg}{9}, \quad T_A = \frac{4\sqrt{3}mg}{9}$$

$$\sum F_x = ma \Rightarrow T_A \cos 60 - T_B \cos 60 = ma \rightarrow T_A - T_B = T_B = 2ma \rightarrow \frac{2\sqrt{3}}{9}mg = 2ma$$

$$a = \frac{\sqrt{3}}{9}g$$



مطلوبست سرعت زنجیر در $x = \ell$

$$\sqrt{\frac{2P\ell}{m} + \mu_k g \ell} \quad (2)$$

$$\sqrt{\frac{P\ell}{m} - \mu_k g \ell} \quad (1)$$

$$\sqrt{\frac{2P\ell}{m} - \mu_k g \ell} \quad (4)$$

$$\sqrt{\frac{P\ell}{m} + \mu_k g \ell} \quad (3)$$

حل: گزینه ۴ صحیح می باشد.

جرم زنجیر m و جرم واحد طول زنجیر $\frac{m}{\ell}$

جرم قسمتی از زنجیر که بر روی سطح زیر قرار دارد $\frac{m}{\ell}(\ell - x)$

$$P - \mu_k \left[\frac{m}{\ell}(\ell - x)g \right] = ma \Rightarrow a = \frac{P}{m} - \mu_k \left(\frac{\ell - x}{\ell} \right)g = \left(\frac{P}{m} - \mu_k g \right) + \frac{\mu_k}{\ell}gx$$

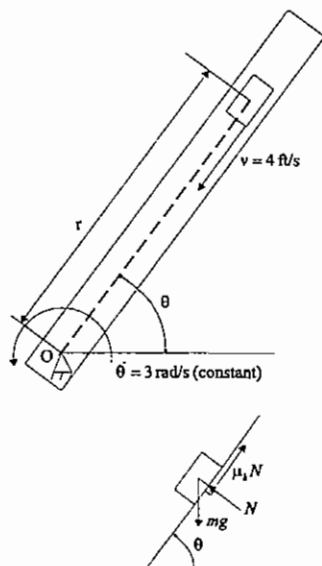
$$\int_0^{v^*} v dv = \int_0^{\ell} a dx = \int_0^{\ell} \left[\left(\frac{P}{m} - \mu_k g \right) + \frac{\mu_k}{\ell} g x \right] dx \Rightarrow$$

$$\frac{v^{*2}}{2} = \left[\left(\frac{P}{m} - \mu_k g \right) x + \frac{\mu_k}{2\ell} g x^2 \right]_0^{\ell} = \left(\frac{P}{m} - \mu_k g \right) \ell + \frac{\mu_k g}{2} \ell = \frac{P\ell}{m} - \frac{\mu_k g \ell}{2}$$

$$\Rightarrow v \Big|_{x=\ell} = v^* = \sqrt{\frac{2P\ell}{m} - \mu_k g \ell}$$

تست نمونه

مطلوبست نیروی عکس‌العمل دیواره لوله روی جرم در $\theta = 30^\circ$ و $mg = 0.2 [\text{lbf}]$



0.012 lbf (۱)

0.024 lbf (۲)

0.036 lbf (۳)

0.048 lbf (۴)

حل: گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$mg = 0.2 [\text{lbf}]$$

$$\begin{cases} F_{\theta} = N - mg \cos \theta = ma_{\theta} = m(2\dot{r}\ddot{\theta} + r\ddot{\theta}) \\ F_r = \mu_k N - mg \sin \theta = ma_r \end{cases}$$

$$N - mg \cos 30 = 2m\dot{r}\ddot{\theta}$$

$$N - 0.2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2 \times 0.2}{32.2} \times (-4) \times 3 \Rightarrow N = 0.024 \text{ lbf}$$

فصل دوم

کار و انرژی

فرض کنیم ذره‌ای به جرم m تحت تاثیر نیروی \vec{F} روی منحنی (c) حرکت می‌کند

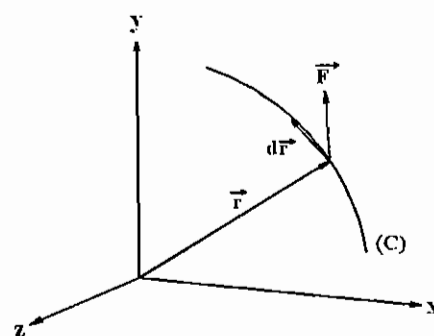
($dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$) کار انجام شده توسط نیروی \vec{F} در جابه‌جایی ناچیز $d\vec{r}$

(کل کار) $W = \int_1^2 dW = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$

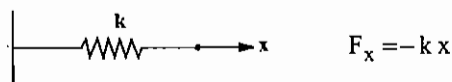
$$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}$$

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \Rightarrow d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow W &= \int_1^2 (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} F_x dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z dz \end{aligned}$$

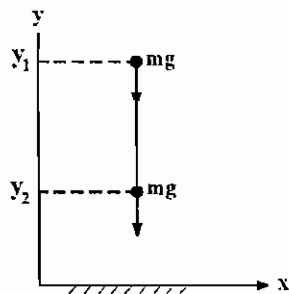


محاسبه کار نیروی فنر:



$$(\text{کار نیروی فنر}) W_s = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx = \int_{x_1}^{x_2} (-kx) dx = \left[-\frac{kx^2}{2} \right]_{x_1}^{x_2} = - \left(\frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2} \right)$$

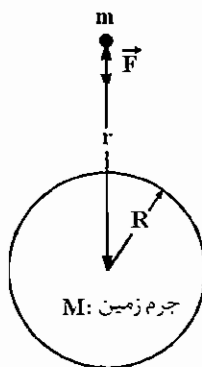
محاسبه کار نیروی وزن:



$$F_y = -mg$$

$$W_g = \int_{y_1}^{y_2} F_y dy = \int_{y_1}^{y_2} (-mg) dy = -mg(y_2 - y_1)$$

محاسبه کار نیروی گرانش:



$$F = mg_r = \frac{kmM}{r^2} \quad (\text{نیروی گرانش برای جسم در فاصله } r \text{ از مرکز زمین})$$

$$F = mg_0 = \frac{kmM}{R^2} \quad (\text{نیروی گرانش برای جسم در نزدیکی سطح زمین}) \Rightarrow km = R^2 g_0$$

در روابط بالا g_r ، g_0 به ترتیب شتاب جاذبه در نزدیکی سطح زمین و در فاصله r از مرکز زمین می‌باشد.

$$\Rightarrow g_r = \frac{km}{r^2} = \frac{R^2 g_0}{r^2} = g_0 \left(\frac{R}{r} \right)^2 \Rightarrow \vec{F} = mg_r \hat{r} = mg_0 \left(\frac{R}{r} \right)^2 \hat{r}$$

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{r_1}^{r_2} \frac{mg_0 R^2}{r^2} dr = -mg_0 R^2 \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} = - \left[\left(\frac{-mg_0 R^2}{r_2} \right) - \left(\frac{-mg_0 R^2}{r_1} \right) \right]$$

اگر کار نیروی \vec{F} در جابه‌جایی ناچیز $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ به صورت منفی دیفرانسیل کامل یک تابع اسکالر V باشد در این صورت کار انجام شده توسط نیروی \vec{F} به مسیر حرکت ذره‌ای که تحت تاثیر نیروی \vec{F} می‌باشد بستگی ندارد و فقط به مقدار تابع V در نقاط ابتدا و انتهای مسیر بستگی دارد. تابع V را تابع پتانسیل می‌نامند.

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -dV \Rightarrow W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_1^2 dV = -(V_2 - V_1)$$

با مقایسه رابطه بالا با کار نیروهای فنر، وزن و گرانش توابع پتانسیل زیر تعریف می‌شوند.

$$V_e = \frac{1}{2} kx^2 \quad (\text{تابع پتانسیل فنر}) \Rightarrow W_s = -(V_e)_2 - (V_e)_1$$

$$V_g = mgy \quad (\text{تابع پتانسیل ثقلی}) \Rightarrow W_g = -(V_g)_2 - (V_g)_1$$

$$V = \frac{mg_0 R^2}{r} \quad (\text{تابع پتانسیل گرانشی}) \Rightarrow W = -(V_2 - V_1)$$

انواع نیروها:

الف - نیروهای ابقایی یا پایستار (Conservative): نیروهایی هستند که کار آن‌ها به مسیر حرکت بستگی ندارد. مانند نیروی وزن، نیروی فنر، نیروی گرانشی، نیرو با مولفه‌های ثابت

ب - نیروهای غیرابقایی یا ناپایستار (Nonconservative): نیروهایی هستند که کار آن‌ها به مسیر حرکت بستگی دارد، مانند: نیروی اصطکاک

شرط پایستار بودن نیروها:

$$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}$$

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \Rightarrow d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k} \Rightarrow$$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dV = -\frac{\partial V}{\partial x} dx - \frac{\partial V}{\partial y} dy - \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \\ F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \\ F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \end{cases} \Rightarrow \vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k} = -\frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} - \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k} = \boxed{-\vec{\nabla} V} \quad (\text{گرایان } V)$$

$$\text{curl } \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} V = - \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial z} \end{vmatrix} = \vec{0}$$

شرط لازم و کافی برای آن که یک نیرو پایستار باشد آن است که کرل آن نیرو صفر باشد.

نکته: نیروها با مولفه‌های ثابت پایستار هستند.

مثال: نیروی $\vec{F} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ [N] به ذره‌ای وارد شده و ذره از موقعیت (1) به مختصات (1, 1, 1) به موقعیت (2) به مختصات (2, 2, 2) حرکت می‌کند کار نیروی \vec{F} و تابع پتانسیل مربوط به این نیرو را بیابید.

$$\begin{cases} F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = 2 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = -2 \Rightarrow V = -2x + f(y, z) \\ F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = 2 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial y} = -2 = \frac{\partial f}{\partial y} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y} = -2 \Rightarrow f = -2y + h(z) \\ \frac{\partial f}{\partial z} = -1 = \frac{\partial h}{\partial z} \Rightarrow h = -z + c \end{cases} \\ F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = 1 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial z} = -1 = \frac{\partial f}{\partial z} \end{cases} \Rightarrow f = -2y - z + c \Rightarrow V = -2x - 2y - z + c$$

$$W = -(V_2 - V_1) = -[(-2 \times 2 - 2 \times 2 - 1 + c) - (-2 \times 1 - 2 \times 1 - 1 + c)] = 5 [\text{N.m}] = 5 [\text{J}]$$

(کار نیروی غیر پایستار) $+ W_{n.c.}$ (کار نیروهای پایستار) $= W_c$ کل کار انجام شده توسط نیروهای خارجی

قضیه کار و انرژی:

$$W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 m \vec{a} \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \Rightarrow d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$$

$$\vec{v} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k} \Rightarrow \vec{a} \cdot d\vec{r} = \ddot{x}dx + \ddot{y}dy + \ddot{z}dz \Rightarrow W = \int_{x_1}^{x_2} m\ddot{x}dx + \int_{y_1}^{y_2} m\ddot{y}dy + \int_{z_1}^{z_2} m\ddot{z}dz$$

از طرفی روابط زیر به آسانی به دست می آیند.

$$\begin{cases} \ddot{x}dx = \dot{x}d\dot{x} \\ \ddot{y}dy = \dot{y}d\dot{y} \\ \ddot{z}dz = \dot{z}d\dot{z} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow W &= \int_{\dot{x}_1}^{\dot{x}_2} m\dot{x}d\dot{x} + \int_{\dot{y}_1}^{\dot{y}_2} m\dot{y}d\dot{y} + \int_{\dot{z}_1}^{\dot{z}_2} m\dot{z}d\dot{z} = m \left[\frac{\dot{x}^2}{2} \right]_{\dot{x}_1}^{\dot{x}_2} + m \left[\frac{\dot{y}^2}{2} \right]_{\dot{y}_1}^{\dot{y}_2} + m \left[\frac{\dot{z}^2}{2} \right]_{\dot{z}_1}^{\dot{z}_2} \\ &= \frac{m(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) - m(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2)}{2} = \frac{mv_2^2 - mv_1^2}{2} = \Delta T \Rightarrow \boxed{W = \Delta T} \text{ و } T = \frac{1}{2}mv^2 \end{aligned}$$

قضیه کار و انرژی بیان می کند که کار انجام شده توسط نیروهای خارجی برابر است با تغییرات انرژی جنبشی.

$$\Rightarrow W = \Delta T = W_c + W_{n.c.} = -\Delta V + W_{n.c.} \Rightarrow W_{n.c.} = \Delta T + \Delta V = \Delta(T + V) = \Delta E$$

$$\Rightarrow \boxed{W_{n.c.} \text{ (کار نیروهای غیر پایستار) } = \Delta E}$$

مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل را انرژی مکانیکی (E) می نامند.

قانون بقای انرژی:

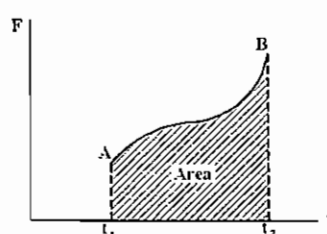
اگر کار نیروهای غیر پایستار صفر باشد، تغییرات انرژی مکانیکی صفر باشد و انرژی مکانیکی ثابت می ماند و به عبارت دیگر انرژی مکانیکی بقا خواهد داشت.

اندازه حرکت خطی و زاویه ای:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{G}}{dt} = \dot{\vec{G}}$$

$$\text{اندازه حرکت خطی (Linear momentum)} = \boxed{\vec{G} = m\vec{v}}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{G}}{dt} \Rightarrow \vec{F}dt = d\vec{G} \rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt = \text{ضربه خطی (Linear Impulse)} = \int_1^2 d\vec{G} = \vec{G}_2 - \vec{G}_1 = \Delta\vec{G}$$



$$\text{Linear Impulse} = \text{Area} = \Delta G$$

قانون بقای اندازه حرکت خطی: اگر جمع نیروهای خارجی در یک راستا صفر باشد بقای اندازه حرکت خطی در آن راستا برقرار است و یا مقدار اندازه حرکت خطی در آن راستا ثابت می‌ماند.

$$\vec{F} = \vec{G} = \vec{0} \Rightarrow \vec{G} = \text{constant}$$

$$\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times m \vec{a} = m (\vec{r} \times \dot{\vec{v}})$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v}) = \dot{\vec{r}} \times \vec{v} + \vec{r} \times \dot{\vec{v}} = \vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \dot{\vec{v}} \rightarrow \vec{M}_o = m \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v}) = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m \vec{v})$$

$$= \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{G}) = \frac{d\vec{H}_o}{dt} = \dot{\vec{H}}_o \Rightarrow \boxed{\vec{M}_o = \dot{\vec{H}}_o}$$

$$o \text{ اندازه حرکت زاویه‌ای حول نقطه } = \vec{H}_o = \vec{r} \times \vec{G}$$

$$\vec{M}_o = \frac{d\vec{H}_o}{dt} \Rightarrow \vec{M}_o dt = d\vec{H}_o \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_o dt = \int_1^2 d\vec{H}_o = \vec{H}_o \Big|_2 - \vec{H}_o \Big|_1 = \Delta \vec{H}_o \quad (\text{ضربه زاویه‌ای}) \quad (\text{Angular impulse})$$

قانون بقای اندازه حرکت زاویه‌ای: اگر جمع گشتاورهای نیروهای خارجی وارد به یک ذره حول یک نقطه ثابت صفر باشد تغییرات اندازه حرکت زاویه‌ای حول آن نقطه صفر بوده و یا اندازه حرکت زاویه‌ای حول آن نقطه بقا خواهد داشت.

$$\vec{M}_o = \vec{0} \Rightarrow \dot{\vec{H}}_o \Rightarrow \vec{H}_o = \text{constant}$$

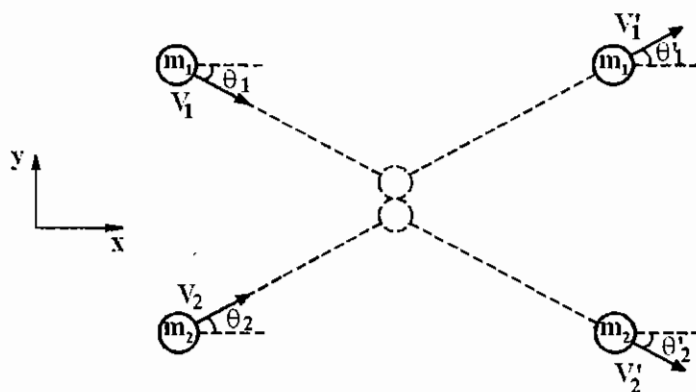
جمع بندی:

$\vec{G} = m \vec{v}$ Linear momentum	$\vec{H}_o = \vec{r} \times \vec{G}$ Angular momentum
$\vec{F} = \dot{\vec{G}}$	$\vec{M}_o = \dot{\vec{H}}_o$
$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \Delta \vec{G}$ Linear impulse	$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_o dt = \Delta \vec{H}_o$ Angular impulse

فصل سوم

برخورد ذرات

دو جرم m_1 و m_2 با سرعت‌های v_1 و v_2 مطابق شکل حرکت می‌کند و با یکدیگر برخورد می‌کند و پس از برخورد با سرعت‌های v'_1 و v'_2 که با محور x زاویه‌ای θ'_1 و θ'_2 می‌سازند از هم دور می‌شوند محور y نشان دهنده راستای برخورد و محور x نشان دهنده راستای عمود بر برخورد می‌باشد. در حالت کلی در برخورد اجرام سرعت‌های اولیه v_1 و v_2 و زاویه‌ای آن‌ها با محور x ها θ_1 و θ_2 معلوم هستند و هدف یافتن بردارهای سرعت‌های بعد از برخورد می‌باشد. لذا مجهولات مساله v'_1 و v'_2 و θ'_1 و θ'_2 هستند.



برای به دست آوردن این مجهولات مجموعاً چهار معادله تشکیل می‌دهیم که دو معادله از این معادلات در راستای عمود بر ضربه و دو معادله دیگر در راستای ضربه نوشته می‌شود.

معادلات در راستای عمود بر ضربه:

چون در راستای عمود بر ضربه از نیروی اصطکاک صرف‌نظر می‌شود نیروی در راستای عمود بر ضربه $F_x = 0$ می‌باشد و لذا ضربه

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} F_x dt = G_x)_2 - G_x)_1$$

خطی در راستای عمود بر ضربه صفر است و بنابراین:

که در آن $G_x)_1$ و $G_x)_2$ به ترتیب اندازه حرکت خطی در راستای محور x ها قبل و بعد از برخورد هستند. رابطه بالا برای تک تک اجرام به صورت زیر نوشته می شود.

$$m_1 v'_1 \cos \theta'_1 - m_1 v_1 \cos \theta_1 = 0 \quad \text{برای جرم اول:}$$

$$m_2 v'_2 \cos \theta'_2 - m_2 v_2 \cos \theta_2 = 0 \quad \text{برای جرم دوم:}$$

و یا داریم:

$$(v'_x)_1 = (v_x)_1 \quad (1)$$

$$(v'_x)_2 = (v_x)_2 \quad (2)$$

که در آن $(v_x)_1 = v_1 \cos \theta_1$ و $(v_x)_2 = v_2 \cos \theta_2$ به ترتیب مولفه های سرعت اولین و دومین جرم در راستای عمود بر ضربه قبل از برخورد و $(v'_x)_1 = v'_1 \cos \theta'_1$ و $(v'_x)_2 = v'_2 \cos \theta'_2$ به ترتیب مولفه های سرعت اولین و دومین جرم در راستای عمود بر ضربه بعد از برخورد می باشد. به عبارت دیگر در برخورد اجرام مولفه سرعت اجرام در راستای عمود بر ضربه برای تک تک اجرام تغییر نمی کند و قبل و بعد از برخورد ثابت می باشد.

معادلات در راستای ضربه:

در راستای ضربه (محور y) دو جرم نیروی F_y را به یکدیگر وارد می کنند که طبق قانون عمل و عکس العمل نیرویی که جرم دوم به اول وارد می کند با نیروی که جرم اول به دوم وارد می کند برابر و در خلاف جهت می باشد.

$$\int_{t_1}^{t_2} F_y dt = G_y)_2 - G_y)_1 = m_1 v'_1 \sin \theta'_1 - (-m_1 v_1 \sin \theta_1) \quad \text{ضربه در راستای محور } y \text{ برای جرم اول:}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} -F_y dt = G_y)_2 - G_y)_1 = -m_2 v'_2 \sin \theta'_2 - m_2 v_2 \sin \theta_2 \quad \text{ضربه در راستای محور } y \text{ برای جرم دوم:}$$

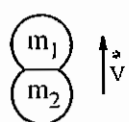
چون مقدار F_y مجهول است می بایستی با جمع دو معادله بالا آن را حذف کنیم، بنابراین نتیجه می شود:

$$m_1 v'_1 \sin \theta'_1 + m_1 v_1 \sin \theta_1 - m_2 v'_2 \sin \theta'_2 - m_2 v_2 \sin \theta_2 = 0 \Rightarrow$$

$$-m_1 v_1 \sin \theta_1 + m_2 v_2 \sin \theta_2 = -m_2 v'_2 \sin \theta'_2 + m_1 v'_1 \sin \theta'_1 \quad (3) \quad \text{قانون بقای اندازه حرکت خطی برای مجموعه دو جرم در راستای ضربه}$$

در عبارت بالا سمت چپ عبارت مجموع اندازه حرکت های خطی دو جرم در راستای ضربه قبل از برخورد و عبارت سمت راست مجموع اندازه حرکت های خطی دو جرم در راستای ضربه بعد از برخورد می باشد.

حال می بایستی آخرین معادله که در راستای ضربه نوشته می شود را تشکیل می دهیم تا تمامی مجهولات مساله به دست آیند.



فرض کنیم دو جرم m_1 و m_2 هنگامی که در راستای ضربه به ترتیب با سرعت های $v_1 \sin \theta_1$ و $v_2 \sin \theta_2$ به هم نزدیک شدند به هم تماس می شوند و سپس برای مدت زمان کوتاهی دو جرم دچار تغییر شکل شده و دو جرم آن قدر به هم نزدیک می شوند تا به ماکزیمم تغییر شکل برسند.

اگر سرعت مجموعه در این وضعیت v^* (که آنرا سرعت درحین تغییر شکل می نامیم) باشد دو جرم پس از این وضعیت دوباره از هم کم کم دور می شوند و نهایتاً از هم جدا می شوند و با سرعت های $v'_1 \sin \theta'_1$ و $-v'_2 \sin \theta'_2$ از هم دور می شوند. مرحله آغاز تماس دو جرم تا ماکزیمم تغییر شکل اجرام را « مرحله تغییر شکل » و مرحله ماکزیمم تغییر شکل اجرام تا آغاز جدایش دو جرم « مرحله بازگشت » نامیده می شود. ضریب بازگشت برای دو جرم برخورد کننده که به جنس اجرام برخورد کننده بستگی دارد و به کمک آزمایش تعیین می شود را به صورت زیر تعریف شود.

$$e = \frac{\text{ضربه در مرحله بازگشت}}{\text{ضربه در مرحله تغییر شکل}} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} F_r dt}{\int_{t_0}^{t_1} F_d dt} = \frac{\text{تغییرات اندازه حرکت خطی در راستای ضربه در مرحله بازگشت}}{\text{تغییرات اندازه حرکت خطی در راستای ضربه در حین تغییر شکل}} \Rightarrow$$

r: restitution (بازگشت)

d: deformation (تغییر شکل)

$$e = \frac{m_1 v_1' \sin \theta_1' - m_1 v^*}{m_1 v^* - (-m_1 v_1 \sin \theta_1)} = \frac{v_1' \sin \theta_1' - v^*}{v^* + v_1 \sin \theta_1} \quad \text{ضریب بازگشت برای جرم اول:}$$

$$e = \frac{-m_2 v_2' \sin \theta_2' - m_2 v^*}{m_2 v^* - m_2 v_2 \sin \theta_2} = \frac{v_2' \sin \theta_2' + v^*}{-v^* + v_2 \sin \theta_2} \quad \text{ضریب بازگشت برای جرم دوم:}$$

$$e = \frac{v_1' \sin \theta_1' - v^*}{v^* + v_1 \sin \theta_1} = \frac{v_2' \sin \theta_2' + v^*}{-v^* + v_2 \sin \theta_2} \Rightarrow e = \frac{(v_1' \sin \theta_1' - v^*) + (v_2' \sin \theta_2' + v^*)}{(v^* + v_1 \sin \theta_1) + (-v^* + v_2 \sin \theta_2)} = \frac{v_1' \sin \theta_1' + v_2' \sin \theta_2'}{v_1 \sin \theta_1 + v_2 \sin \theta_2} \Rightarrow$$

$$e = \frac{v_1' \sin \theta_1' + v_2' \sin \theta_2'}{v_1 \sin \theta_1 + v_2 \sin \theta_2} = \frac{\text{سرعت نسبی دو جرم در راستای ضربه بعد از برخورد}}{\text{سرعت نسبی دو جرم در راستای ضربه قبل از برخورد}} \quad (4)$$

به خاطر داشته باشید که اگر دو جرم به هم نزدیک یا دور شوند سرعت‌های نسبی آن‌ها مجموع اندازه سرعت‌هایشان و اگر هم جهت با هم حرکت کنند سرعت نسبی آن‌ها تفاضل اندازه سرعت بزرگ‌تر منهای اندازه سرعت کوچک‌تر خواهد بود. اگر یکی از اجرام برخورد کننده مثلاً جرم دوم یک جرم وزین ساکن باشد، نتیجه می‌شود

$$\begin{cases} v_2 = v_2' = 0 \\ m_2 \rightarrow \infty \end{cases}$$

در این صورت تنها مجهولات مساله v_1' و θ_1' خواهد بود. در این صورت معادله (2) حتماً ارضا می‌شود و معادله (3) بی‌معنی خواهد بود، در این صورت تنها دو معادله زیر باقی می‌ماند:

$$\begin{aligned} v_x' &= v_x \\ e &= \frac{v_1' \sin \theta_1'}{v_1 \sin \theta_1} \end{aligned}$$

جمع‌بندی:

در مسایل برخورد ذرات در حالت کلی چهار معادله نوشته می‌شود. دو معادله در راستای عمود بر ضربه که این معادله عبارتند از:

(۱) مؤلفه سرعت جرم اول در راستای عمود بر ضربه تغییر نمی‌کند.

(۲) مؤلفه سرعت جرم دوم در راستای عمود بر ضربه تغییر نمی‌کند.

و دو معادله دیگر که در راستای ضربه نوشته می‌شوند عبارتند از:

(۳) قانون بقای اندازه حرکت مجموعه دو جرم برخورد کننده در راستای ضربه (مجموع اندازه حرکت‌های خطی مجموعه دو جرم در راستای ضربه قبل از برخورد با مجموع اندازه حرکت‌های خطی مجموعه دو جرم در راستای ضربه بعد از برخورد برابر است).

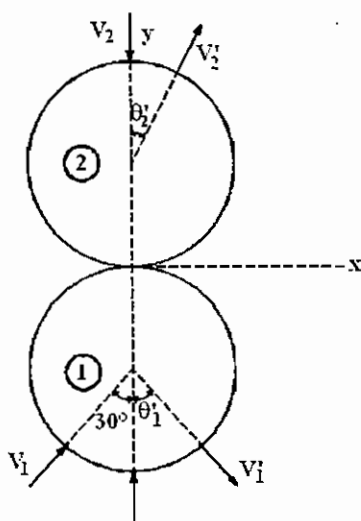
(۴) ضریب بازگشت برابر است با نسبت سرعت نسبی دو جرم در راستای ضربه بعد از برخورد به سرعت نسبی دو جرم در راستای ضربه قبل از برخورد.

در حالت خاص اگر جرم دوم یک جرم وزین ساکن باشد، این چهار معادله به دو معادله زیر کاهش می‌یابد.

(۱) مؤلفه سرعت جرم متحرک در راستای عمود بر ضربه تغییر نمی‌کند.

(۲) ضریب بازگشت برابر است با نسبت سرعت جرم متحرک در راستای ضربه بعد از برخورد به سرعت جرم متحرک در راستای ضربه قبل از برخورد.

تست سال (۶۸ - ۶۷)



دو گلوله آهنی به جرم مساوی و با سرعت‌های اولیه v_1 و v_2 طوری برخورد می‌کنند که جهت سرعت v_2 روی خطی که مرکز دو گلوله را به هم وصل می‌کند می‌باشد. اگر برخورد کاملاً پلاستیک نباشد، جهت گلوله 2 بعد از برخورد.

(۱) در جهت محور y می‌باشد.

(۲) در جهت محور x می‌باشد.

(۳) در جهت زاویه 30 درجه با محور y می‌باشد.

(۴) مشخص نیست.

- برخورد الاستیک کامل برخوردی است که در آن ضریب بازگشت $e = 1$ می‌باشد.

- برخورد پلاستیک کامل برخوردی است که در آن ضریب بازگشت $e = 0$ می‌باشد (زمانی که سرعت اجرام برخورد کننده بعد از برخورد در جهت برخورد یکسان می‌شود مطرح می‌باشد).

- ضریب بازگشت همواره عددی است بین صفر و یک

قانون بقای اندازه حرکت خطی برای جرم ② در راستای عمود بر ضربه عبارت است از:

$$m_2 v_2' \sin \theta_2' = m_2 \times 0 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_2' = 0 \Rightarrow \text{اگر } v_2' = 0 \text{ باشد سوال راجع به } \theta_2' \text{ بی‌معنا خواهد بود.} \\ \text{یا} \\ \sin \theta_2' = 0 \Rightarrow \text{جهت گلوله ② بعد از برخورد در راستای محور } y \text{ می‌باشد.} \end{cases}$$

به نظر می‌رسد که جواب گزینه (۱) باشد ولی مساله نیاز به بحث بیشتری دارد. لذا دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

الف) $v_2' = 0$

$$e = \frac{v_1' \cos \theta_1' + v_2' \cos \theta_2'}{v_1 \cos 30 + v_2} \neq 0 \Rightarrow \boxed{e = \frac{v_1' \cos \theta_1'}{\frac{\sqrt{3}}{2} v_1 + v_2} \neq 0} \quad (I)$$

قانون بقای اندازه حرکت خطی برای جرم ① در راستای عمود بر ضربه

$$\Rightarrow \boxed{v_1' \sin \theta_1' = 0.5 v_1} \quad (II)$$

قانون بقای اندازه حرکت خطی برای مجموعه دو جرم در راستای ضربه

$$m_1 v_1 \sin 30 - m_2 v_2 = -m_1 v_1' \cos \theta_1' + m_2 v_2' \cos \theta_2' \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} v_1 - v_2 = -v_1' \cos \theta_1' \Rightarrow \boxed{v_1' \cos \theta_1' = v_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} v_1} \quad (III)$$

$$\theta_1' = \tan^{-1} \left(\frac{v_1}{2v_2 - \sqrt{3} v_1} \right), \quad v_1' = \sqrt{(0.5 v_1)^2 + \left(v_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} v_1 \right)^2}$$

از حل معادلات (II) و (III) داریم:

ولی از معادلات حاکم به هیچ وجه نمی‌توان θ'_2 را مشخص نمود چون θ'_2 حذف شده است. لذا به نظر می‌رسد جواب گزینه (۴) باشد در ضمن با مقایسه معادلات (III) و (I) در می‌یابیم که ضریب بازگشت می‌بایستی بر حسب سرعت‌های v_1 و v_2 بیان شود که لزوماً این مقدار نمی‌باشد.

$$\theta'_2 = 0 \quad \text{ب)}$$

به لحاظ فیزیکی به نظر می‌رسد که وقوع حالت (ب) نسبت به (الف) منطقی‌تر است. چرا که جواب‌ها بر حسب ضریب بازگشت خواهد بود.

$$e = \frac{v'_1 \cos \theta'_1 + v'_2}{v_1 \cos 30 + v_2} \rightarrow v'_1 \cos \theta'_1 + v'_2 = e \left(\frac{\sqrt{3}}{2} v_1 + v_2 \right) \quad (1)$$

$$-v'_1 \cos \theta'_1 + v'_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} v_1 - v_2 \quad (2)$$

از حل هم‌زمان معادلات (1) و (2) و (II) داریم:

$$2v'_2 = (e+1) \frac{\sqrt{3}}{2} v_1 + (e-1) v_2 \Rightarrow v'_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (e+1) v_1 + \left(\frac{e-1}{2} \right) v_2$$

$$\Rightarrow v'_1 \cos \theta'_1 = e \left(\frac{\sqrt{3}}{2} v_1 + v_2 \right) - \frac{\sqrt{3}}{4} (e+1) v_1 - \left(\frac{e-1}{2} \right) v_2 = \sqrt{3} \frac{(e-1)}{4} v_1 + \frac{(e+1)}{2} v_2$$

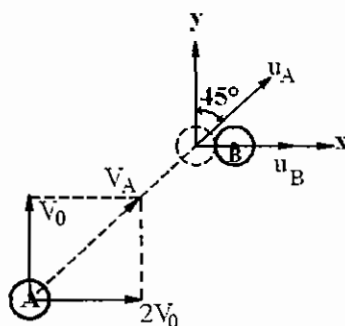
$$\Rightarrow \theta'_1 = \tan^{-1} \left(\frac{2v_1}{\sqrt{3}(e-1)v_1 + 2(e+1)v_2} \right), \quad v'_1 = \sqrt{\left(0.5v_1 \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}(e-1)}{4} v_1 + \frac{(e+1)}{2} v_2 \right)^2}$$

بنابراین جواب گزینه (۱) می‌باشد.

تست سال (۷۲ - ۷۳)

ذره B ساکن و ذره A با سرعت v_A با مولفه‌های داده شده در شکل به آن نزدیک می‌شود. بعد از برخورد سرعت ذره B برابر با $u_B = v_0$ در امتداد محور x و زاویه بردار سرعت ذره A با محور x برابر 45° است. در این برخورد ضریب بازگشت (coefficient of restitution) برابر است با:

- | | |
|----------|---------|
| (۱) صفر | (۲) یک |
| (۳) ۰.۷۵ | (۴) ۰.۵ |

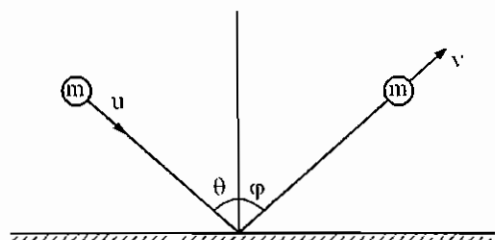


$$u_A \cos 45^\circ - v_0 = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} u_A = v_0 \quad \text{قانون بقای اندازه حرکت خطی برای جرم A در راستای عمود بر ضربه:}$$

$$e = \frac{u_B - u_A \cos 45^\circ}{2v_0 + 0} = \frac{v_0 - \frac{\sqrt{2}}{2} u_A}{2v_0} = 0$$

جواب گزینه (۱) می‌باشد.

تست سال (۷۴ - ۷۵)



گلوله‌ای مطابق شکل با سرعت u به سطح افقی مسطح و بدون اصطکاکی برخورد می‌کند. اگر زاویه برخورد آن نسبت به عمود بر سطح θ باشد، زاویه انعکاس گلوله یعنی ϕ بر حسب θ و ضریب بازگشت ϵ چگونه است؟

$$\tan \phi = 2\epsilon \tan \theta \quad (۲) \quad 2\theta = \phi \quad (۱)$$

$$\tan \phi = \epsilon \tan \theta \quad (۴) \quad \tan \theta = \epsilon \tan \phi \quad (۳)$$

جرم m با سرعت $u \cos \theta$ به سطح نزدیک می‌شود لذا سرعت نسبی در امتداد ضربه قبل از برخورد $u \cos \theta$ می‌باشد.

جرم m با سرعت $v \cos \phi$ از سطح دور می‌شود لذا سرعت نسبی در امتداد ضربه بعد از برخورد $v \cos \phi$ می‌باشد.

$$\epsilon = \frac{v \cos \phi}{u \cos \theta} \quad (\text{ضریب بازگشت})$$

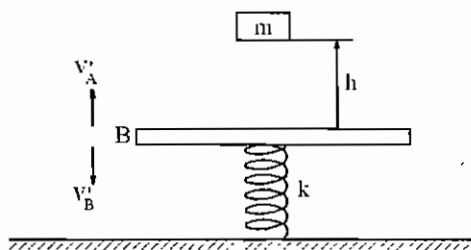
قانون بقای اندازه حرکت خطی در راستای عمود بر ضربه برای جرم m : $m u \sin \theta = m v \sin \phi$

$$\Rightarrow \frac{u}{v} = \frac{\sin \phi}{\sin \theta} \Rightarrow \epsilon = \left(\frac{v}{u} \right) \frac{\cos \phi}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta}{\sin \phi} \left(\frac{\cos \phi}{\cos \theta} \right) = \frac{\tan \theta}{\tan \phi} \Rightarrow \boxed{\tan \theta = \epsilon \tan \phi}$$

لذا جواب گزینه (۳) می‌باشد.

اگر برخورد الاستیک کامل باشد $\epsilon = 1$ می‌باشد که در این حالت $\theta = \phi$ می‌باشد لازم به ذکر است زاویه ϕ را می‌توان زاویه بازخورد نامید (در این حالت مسیر حرکت جرم همانند مسیر حرکت نور است که به آینه برخورد می‌کند و زاویه تابش با بازتابش برابر می‌باشد).

تست سال (۷۴ - ۷۵)



در شکل زیر وزنه A بر جرم m از ارتفاع h بر روی صفحه‌ای به جرم $2m$ سقوط می‌کند. ثابت فنر برابر k است. اگر ضریب برخورد e باشد، سرعت صفحه بلافاصله پس از برخورد کدام است؟

$$\sqrt{2gh}ek \quad (۲) \quad \sqrt{2gk} \quad (۱)$$

$$\sqrt{2gh}(1+e)k \quad (۴) \quad \frac{1}{3}\sqrt{2gh}(1+e) \quad (۳)$$

هنگامی که جرم m ارتفاع h را با سقوط آزاد طی می‌کند سرعتش قبل از برخورد به $\sqrt{2gh}$ می‌رسد. فرض کنید که جرم m پس از برخورد به سمت بالا و صفحه B به سمت پایین حرکت می‌کند (می‌توان فرض نمود که هم جهت هم، حرکت می‌کنند) در این صورت، قانون بقای اندازه حرکت خطی در راستای برخورد برای جرم m و صفحه B عبارت است از:

$$-m\sqrt{2gh} + 2m \times 0 = mv'_A - 2m v'_B \Rightarrow v'_A - 2v'_B = -\sqrt{2gh}$$

$$e = \frac{v'_A + v'_B}{\sqrt{2gh} + 0} \Rightarrow v'_A + v'_B = e\sqrt{2gh} \quad (\text{ضریب برخورد یا بازگشت})$$

از حل دو معادله دو مجهول فوق داریم:

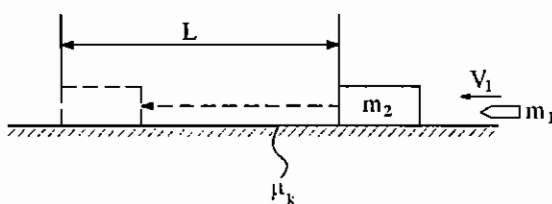
$$\boxed{v'_B = \frac{(e+1)}{3}\sqrt{2gh}}, \quad \boxed{v'_A = \frac{(2e-1)}{3}\sqrt{2gh}}$$

لذا جواب گزینه (۳) می‌باشد.

توضیح: اگر $2e - 1 > 0$ باشد $v_A' > 0$ خواهد بود به عبارت دیگر برای $e > 0.5$ دو جرم پس از برخورد از هم دفع می‌شوند و در غیر این صورت هم جهت حرکت خواهند نمود.

تست سال (۷۴ - ۷۵)

گلوله‌ای با جرم m_1 پس از برخورد به جعبه‌ای با جرم m_2 داخل آن فرو رفته و نسبت به آن ساکن می‌شود. جعبه در اثر برخورد گلوله به حرکت درآمده و بر روی سطح زبر با ضریب اصطکاک μ_k ، L متر به جلو حرکت می‌نماید. سرعت گلوله پیش از برخورد کدام است؟



$$\frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{2gL\mu_k} \quad (۲)$$

$$\frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{gL\mu_k} \quad (۱)$$

$$\frac{m_2}{m_1} \sqrt{gL\mu_k} \quad (۴)$$

$$\frac{m_1 + m_2}{m_1} \mu_k \sqrt{gL} \quad (۳)$$

قانون بقای اندازه حرکت خطی برای مجموعه دو جرم عبارت است از:

$$m_1 v_1 + m_2 \times 0 = (m_1 + m_2) v_0 \Rightarrow v_1 = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1} \right) v_0$$

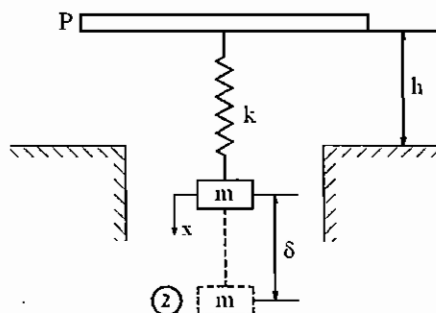
مجموعه دو جرم $m_1 + m_2$ با سرعت اولیه v_0 شروع به حرکت کرده و تحت تاثیر نیروی اصطکاک $F_f = -\mu_k (m_1 + m_2)g$ مسافت L را طی می‌کنند و نهایتاً متوقف می‌شوند.

$$F_f = (m_1 + m_2)a \Rightarrow a = -\mu_k g$$

$$\Rightarrow 0^2 - v_0^2 = 2aL = 2(-\mu_k g)L \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gL\mu_k} \Rightarrow v_1 = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1} \right) \sqrt{2gL\mu_k}$$

جواب گزینه (۲) می‌باشد.

تست سال (۷۴ - ۷۵)



مطابق شکل وزنه‌ای به وزن 60lb که توسط فنری با ضریب سختی $k = 150 \text{ lb/ft}$ به صفحه P متصل است، از حالت سکون و از ارتفاع $h = 1 \text{ [ft]}$ رها شده و پس از اصابت به تکیه‌گاه، صفحه P روی تکیه‌گاه ساکن می‌شود. مقدار ماکزیمم تغییر طول فنر کدام است؟

$$1.52 \text{ ft} \quad (۲) \quad 0.81 \text{ ft} \quad (۱)$$

$$1.38 \text{ ft} \quad (۴) \quad 2.24 \text{ ft} \quad (۳)$$

روش اول: فرض می‌گردد که با افزودن جرم m فنر دچار تغییر مکان استاتیکی δ_{st} می‌شود و سپس مجموعه جرم m و صفحه

$$P \text{ رها می‌شود بنابراین: } mg = k \delta_{st}$$

قانون بقای انرژی مکانیکی بین دو موقعیت ① و ② نوشته می‌شود. در موقعیت ① فرض می‌شود که فنر به اندازه δ_{st} کشیده شود و مجموعه جرم m و صفحه P و فنر مسافت h را طی نموده و به سرعت $\sqrt{2gh}$ رسیده‌اند، بنابراین نتیجه می‌شود:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_g)_1 = 0 \\ T_1 = \frac{1}{2} m (\sqrt{2gh})^2 = mgh \\ V_e)_1 = \frac{1}{2} k (\delta_{st})^2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} V_g)_2 = -mg\delta \\ T_2 = 0 \quad \Leftarrow \text{در حالتی که فنر ماکزیمم کشیدگی را دارد سرعت جرم } m \text{ صفر خواهد بود} \\ V_e)_2 = \frac{1}{2} k (\delta + \delta_{st})^2 = \frac{1}{2} k \delta^2 + k \delta_{st} \delta + \frac{1}{2} k \delta_{st}^2 = \frac{1}{2} k \delta^2 + mg\delta + \frac{1}{2} k \delta_{st}^2 \end{array} \right.$$

$$E_1 = T_1 + V_g)_1 + V_e)_1 = mgh + \frac{1}{2} k (\delta_{st})^2 = E_2 = T_2 + V_g)_2 + V_e)_2 = 0 + (-mg\delta) + \frac{1}{2} k \delta^2 + mg\delta + \frac{1}{2} k (\delta_{st})^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} k \delta^2 = mgh \Rightarrow \delta = \sqrt{\frac{2mgh}{k}} = \sqrt{\frac{2 \times 60 \times 1}{150}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \approx 0.89 \approx 0.81 \text{ ft}$$

جواب گزینه (۱) می‌باشد.

روش دوم: همانطور که در روش اول مشاهده شد عملاً ترم‌های مربوط به جابه‌جایی استاتیکی حذف شد. چرا که جابه‌جایی استاتیکی در اثر نیروی وزن ایجاد می‌شود و اگر ما انرژی پتانسیل ثقلی که ناشی از نیروی وزن است و جابه‌جایی استاتیکی را در نظر بگیریم این دو اثر همدیگر را خنثی می‌کنند. بنابراین هر زمان جابه‌جایی استاتیکی فنر تنها در اثر نیروی وزن باشد می‌توان انرژی پتانسیل ثقلی را در نظر نگرفت بنابراین:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1 = mgh \\ V_e)_1 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow E_1 = mgh \quad \left\{ \begin{array}{l} T_2 = 0 \\ V_e)_2 = \frac{1}{2} k \delta^2 \end{array} \right. \Rightarrow E_2 = \frac{1}{2} k \delta^2 \quad \Rightarrow E_1 = E_2 \Rightarrow mgh = \frac{1}{2} k \delta^2 \rightarrow \delta = \sqrt{\frac{2mgh}{k}}$$

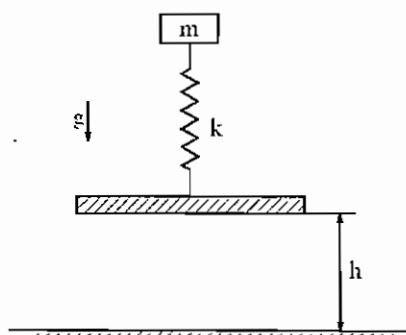
در صورتی که فرض شود قبل از رها شدن فنر دچار تغییر طول استاتیکی نبوده می‌بایست پتانسیل ثقلی در نظر گرفته شود در این صورت:

$$\frac{1}{2} k \delta^2 = mgh + mg\delta \rightarrow k \delta^2 - 2mg\delta - 2mgh = 0 \Rightarrow \delta = \frac{mg}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + 2\left(\frac{mg}{k}\right)h}$$

$\Rightarrow \delta = 1.38 \text{ [ft]}$ (جواب قابل قبول)

در این صورت جواب گزینه ۴ خواهد بود

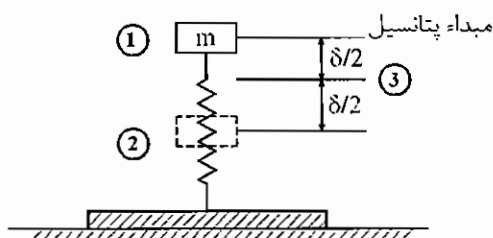
تست سال (۷۸ - ۷۹)



سیستم جرم و فنر نشان داده شده از ارتفاع h رها می‌شود و پس از برخورد، پایه به زمین می‌چسبد و حرکت جرم m باعث فشردن فنر می‌شود. سرعت جرم m در موقعیتی که فنر به اندازه نصف فشردگی ماکزیمم فشرده شده

است با فرض $k = \frac{4mg}{h}$ عبارت است از:

- (۱) \sqrt{gh} (۲) $\sqrt{2gh}$ (۳) $\sqrt{3gh}$ (۴) $2\sqrt{gh}$



اگر حداکثر فشردگی فنر δ فرض شود مطابق مثال قبل از جابه‌جایی استاتیکی δ_{st} صرف‌نظر می‌شود و در عوض انرژی پتانسیل ثقلی هم در نظر گرفته نمی‌شود.

$$\begin{cases} T_1 = \frac{1}{2} m (\sqrt{2gh})^2 = mgh \\ V_e)_1 = 0 \end{cases} \quad \text{در نقطه ① داریم}$$

$$\Rightarrow E_1 = T_1 + V_e)_1 = mgh$$

به‌طور مشابه در نقطه ② داریم:

$$\begin{cases} T_2 = 0 \\ V_e)_2 = \frac{1}{2} k \delta^2 \end{cases} \Rightarrow E_2 = T_2 + V_e)_2 = \frac{1}{2} k \delta^2$$

در نقطه ③ نیز انرژی مکانیکی به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{cases} T_3 = \frac{1}{2} m v_3^2 \\ V_e)_3 = \frac{1}{2} k \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow E_3 = \frac{1}{2} m v_3^2 + \frac{1}{8} k \delta^2$$

$$\text{بقای انرژی مکانیکی} \Rightarrow E_1 = E_2 = E_3 \Rightarrow mgh = \frac{1}{2} k \delta^2 = \frac{1}{2} m v_3^2 + \frac{1}{8} k \delta^2 \Rightarrow \delta = \sqrt{\frac{2mgh}{k}} = \sqrt{\frac{2mgh}{4mg}} = \sqrt{\frac{h^2}{2}} = \frac{h}{\sqrt{2}}$$

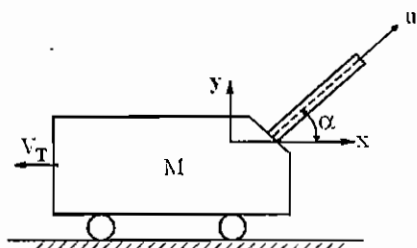
$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_3^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) k \delta^2 \Rightarrow v_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{k \delta^2}{m}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{4mg \times \frac{h^2}{2}}{m}} = \sqrt{\frac{3gh}{2}}$$

جواب هیچ کدام از گزینه‌ها نمی‌باشد. اگر فرض کنیم که فنر در موقع رها شدن فشرده نشده باشد، یعنی δ_{st} وجود ندارد و در حالت رها شدن فنر طول آزاد خود را داشته باشد، خواهیم داشت $V_g)_1 = 0$ ، $V_g)_2 = -mg\delta$ ، $V_g)_3 = -mg\frac{\delta}{2}$ در این صورت $v_3 = \sqrt{2gh}$ ، $\delta = h$ به‌دست می‌آید که در این صورت گزینه (۲) درست می‌باشد.

تست سال (۷۸ - ۷۷)

توپي گلوله‌ای را با سرعت u (نسبت به لوله‌اش) که زاویه α با افق دارد شلیک می‌نماید.

توپ ابتدا در حال سکون بوده اما قادر است که به‌وسیله چرخ‌هایش به حرکت درآید. اگر جرم توپ M و جرم گلوله m باشد سرعت حرکت توپ v_T درست هنگامی که گلوله توپ را ترک می‌نماید کدامیک از پاسخ‌های زیر است؟



$$v_T = \frac{M+m}{m} u \cos \alpha \quad (۲) \quad v_T = \frac{m}{M+m} u \cos \alpha \quad (۱)$$

$$v_T = \frac{m}{M+m} u \sin \alpha \quad (۴) \quad v_T = \frac{M}{M+m} u \sin \alpha \quad (۳)$$

اگر سرعت مطلق گلوله با \vec{v}_g و سرعت مطلق تانک را با \vec{v}_T و سرعت نسبی گلوله نسبت به تانک را با $\vec{v}_{g/T}$ نمایش دهیم داریم:

$$\vec{v}_g = \vec{v}_T + \vec{v}_{g/T} \Rightarrow$$

$$(v_g)_x = u \cos \alpha - v_T$$

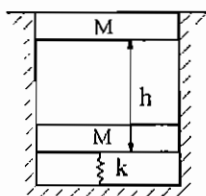
در راستای افق هیچ نیروی خارجی وجود ندارد لذا قانون بقای اندازه حرکت خطی در راستای محور x برقرار است.

$$G_x)_1 = G_x)_2 \Rightarrow 0 = -Mv_T + m(v_g)_x = -Mv_T + m(u \cos \alpha - v_T) \rightarrow v_T = \frac{m}{m+M} u \cos \alpha$$

لذا جواب گزینه (۱) می باشد.

تست سال (۷۵ - ۷۶)

جسمی به جرم M طبق شکل از ارتفاع h رها شده و بر روی جسم دیگری به همان جرم می افتد. این جسم توسط فنری با ضریب سختی k نگه داشته شده است. اگر برخورد کاملاً پلاستیک فرض شود، مقدار سرعت جسم متصل به فنر بلافاصله پس از برخورد کدام است؟



$$\sqrt{gh} \quad (۲)$$

$$\sqrt{\frac{gh}{2}} \quad (۱)$$

$$\sqrt{2gh} \quad (۴)$$

$$\frac{\sqrt{gh}}{2} \quad (۳)$$

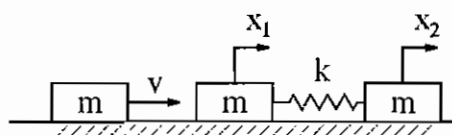
سرعت جسم بالایی پس از طی ارتفاع h، برابر با $\sqrt{2gh}$ خواهد بود.

$$M\sqrt{2gh} + M \times 0 = 2Mv \Rightarrow v = \frac{\sqrt{2gh}}{2} = \sqrt{\frac{gh}{2}}$$

لذا جواب گزینه (۱) می باشد.

تست سال (۷۶ - ۷۷)

دو جرم مساوی m به وسیله فنری با ضریب k به یکدیگر متصل شده اند و روی سطحی افقی و بدون اصطکاک در حالت سکون هستند و فنر آزاد است. جرم مساوی دیگر m با سرعت V با جرم اول برخورد می کند و به آن می چسبند. سرعت سیستم در هنگام حداکثر فشردگی فنر برابر است با:



$$\frac{V}{3} \quad (۲)$$

$$\text{صفر} \quad (۱)$$

$$V \quad (۴)$$

$$\frac{V}{2} \quad (۳)$$

$$2m\ddot{x}_1$$

$$k(x_1 - x_2)$$

$$m\ddot{x}_2$$

$$k(x_1 - x_2)$$

راه حل صحیح مساله طولانی است. نخست این راه حل مطرح می گردد و سپس راه حلی که درست نبوده ولی کوتاه بوده ارایه می گردد. دیاگرام آزاد نیروهای وارد به اجرام متصل به فنر به صورت زیر می باشد. ($x_1 > x_2$)

$$\begin{cases} 2m\ddot{x}_1 + kx_1 - kx_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 - kx_2 + kx_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow M \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + K \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow M = \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \text{ (ماتریس جرم)} \text{ و } K = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \text{ (ماتریس سختی)}$$

$$\det(K - \omega^2 M) = 0 \Rightarrow \det \begin{bmatrix} k - 2m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow 2m^2\omega^4 - 3km\omega^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = 0 \\ \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{2m}} \end{cases} \text{ مد صلب} \Rightarrow \begin{bmatrix} k - m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \frac{X_1}{X_2} = \frac{k}{k - m\omega^2}$$

$$\left. \frac{X_1}{X_2} \right|_{\omega=\omega_1} = 1 \text{ و } \left. \frac{X_1}{X_2} \right|_{\omega=\omega_2} = \frac{k}{k - 2m\left(\sqrt{\frac{3k}{2m}}\right)^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \Psi = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ (ماتریس شکل مد)}$$

$$K^* = \Psi^T K \Psi = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3k}{2} \\ 0 & \frac{3k}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{9k}{4} \end{bmatrix}$$

$$M^* = \Psi^T M \Psi = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2m & -m \\ m & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3m & 0 \\ 0 & \frac{3m}{2} \end{bmatrix}$$

لذا معادله $M\{\ddot{x}\} + K\{x\} = \{0\}$ به صورت $M^*\{\ddot{q}\} + K^*\{q\} = \{0\}$ که در آن $q = \Psi^{-1}\{x\}$ می‌باشد.

لذا داریم:

$$\begin{bmatrix} 3m & 0 \\ 0 & \frac{3m}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{9k}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3m\ddot{q}_1 = 0 \Rightarrow q_1(t) = At + B \\ \frac{3}{2}m\ddot{q}_2 + \frac{9k}{4}q_2 = 0 \Rightarrow q_2(t) = C\cos\omega_2 t + D\sin\omega_2 t \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_1 - \frac{q_2}{2} \\ q_1 + q_2 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = At + B - \frac{1}{2}(C\cos\omega_2 t + D\sin\omega_2 t) \\ x_2(t) = At + B + (C\cos\omega_2 t + D\sin\omega_2 t) \end{cases}$$

بقای اندازه حرکت خطی برای دو جرم سمت راست

$$mv + m \times 0 = 2m\dot{x}_1(0) \Rightarrow \dot{x}_1(0) = \frac{v}{2}$$

شرایط اولیه عبارتند از:

$$\begin{cases} x_1(0) = 0 \\ \dot{x}_1(0) = \frac{v}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x_2(0) = 0 \\ \dot{x}_2(0) = 0 \end{cases}$$

با اعمال شرایط اولیه نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} B - \frac{C}{2} = 0 \\ A - \frac{D}{2}\omega_2 = \frac{v}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B + C = 0 \\ A + D\omega_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = C = 0 \\ A = \frac{v}{3}, D = -\frac{v}{3\omega_2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = \frac{v}{3}t + \frac{v}{6\omega_2}\sin\omega_2 t = \frac{v}{3}\left(t + \frac{\sin\omega_2 t}{2\omega_2}\right) \\ x_2(t) = \frac{v}{3} - \frac{v}{3\omega_2}\sin\omega_2 t = \frac{v}{3}\left(t - \frac{\sin\omega_2 t}{2\omega_2}\right) \end{cases} \Rightarrow x_1 - x_2 = \frac{v}{3}\left(\frac{3\sin\omega_2 t}{2\omega_2}\right) = \frac{v}{2}\frac{\sin\omega_2 t}{\omega_2}$$

فاصله دو جرم، $|x_1 - x_2|$ زمانی ماکزیمم است که $t = \frac{\pi}{2\omega_2}$ که در این صورت:

$$\begin{cases} \dot{x}_1\left(\frac{\pi}{2\omega_2}\right) = \frac{v}{3}\left(1 + \frac{1}{2}\cos\left(\omega_2 \frac{\pi}{2\omega_2}\right)\right) = \frac{v}{3} \\ \dot{x}_2\left(\frac{\pi}{2\omega_2}\right) = \frac{v}{3}\left(1 - \cos\left(\omega_2 \frac{\pi}{2\omega_2}\right)\right) = \frac{v}{3} \end{cases}$$

که جواب گزینه ۲ می‌باشد. در بعضی از مراجع حل مسئله به صورت زیر ارائه شده است.

به نظر می‌رسد که طراحان فرض نموده‌اند که به دلیل نبود اصطکاک جرم سمت راستی بدون هیچ ممانعتی از حرکت می‌تواند حرکت کند و لذا فنر اصلاً فشرده نمی‌شود و مجموعه اجرام متصل به فنر مانند یک جرم $2m$ عمل می‌کنند، در این صورت بنابر بقای اندازه حرکت خطی داریم:

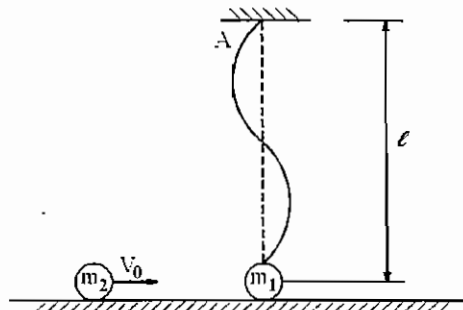
$$mv + 2m \times 0 = (m + 2m)v^* \Rightarrow \boxed{v^* = \frac{v}{3}}$$

لذا جواب گزینه (۲) می‌باشد.

می‌توان مسئله را به صورت زیر حل نمود. می‌توان قانون بقای اندازه حرکت خطی را برای سیستم جرم نوشت (فرض نمود که در هنگام حداکثر فشرده‌گی v^* سرعت مرکز جرم سیستم باشد در این صورت معادله و پاسخ بالا صادق خواهد بود.

تست سال (۷۸ - ۷۹)

جرم m_1 توسط نخ به طول $\sqrt{2}\ell$ به نقطه A متصل شده است و در اثر برخورد پلاستیک گلوله m_2 با سرعت v_0 به آن به حرکت در می‌آید. در صورتی که حرکت کل مجموعه در صفحه افقی انجام گیرد. با فرض $m_1 = m_2$ سرعت زاویه‌ای نخ در اولین لحظه‌ای که تحت کشش قرار می‌گیرد برابر کدام یک از گزینه‌های زیر است؟



$$\frac{v_0}{\sqrt{2}\ell} \quad (۲)$$

$$\frac{v_0}{\ell} \quad (۱)$$

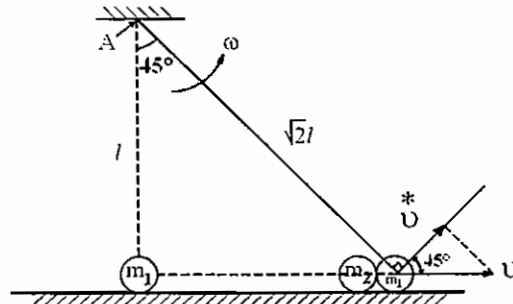
$$\frac{v_0}{4\ell} \quad (۴)$$

$$\frac{v_0}{2\ell} \quad (۳)$$

$$mv_0 + m \times 0 = 2mv \Rightarrow v = \frac{v_0}{2}$$

($m_1 = m_2 = m$) مجموعه اجرام در راستای برخورد برای مجموعه اجرام

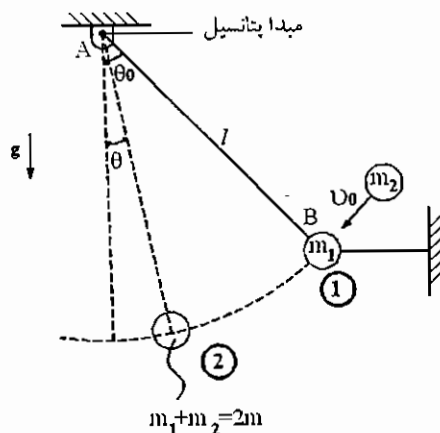
$$v^* = v \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{v_0}{2} \right) = \frac{\sqrt{2} v_0}{4} = \sqrt{2} \ell \omega$$



مولفه در راستای ریسمان سرعت v بعد از این که نخ تحت کشش قرار گرفت به طور ناگهانی صفر می شود.

جواب گزینه (۴) می باشد. $\Rightarrow \boxed{\omega = \frac{v_0}{4\ell}}$

تست سال (۷۸ - ۷۹)



نقطه مادی به جرم m_1 در صفحه قائم توسط دو نخ بدون جرم مطابق شکل نگاه داشته شده است. در اثر برخورد پلاستیک گلوله ای به جرم m_2 و سرعت v_0 در راستای نشان داده شده نخ افقی پاره شده و سیستم تبدیل به یک آونگ ساده می شود حداکثر کشش ایجاد شده در نخ AB با فرض

$$m_1 = m_2 = m \text{ و } v_0 = 2\sqrt{g\ell} \text{ و } \theta_0 = \frac{\pi}{3} \text{ برابر است با:}$$

- | | |
|-----------|-----------|
| (۱) mg | (۲) $3mg$ |
| (۳) $4mg$ | (۴) $6mg$ |

قانون بقای اندازه حرکت خطی برای مجموعه دو جرم در راستای ضربه:

$$mv_0 + m \times 0 = 2m v_1 \Rightarrow v_1 = \frac{v_0}{2} = \sqrt{g\ell}$$

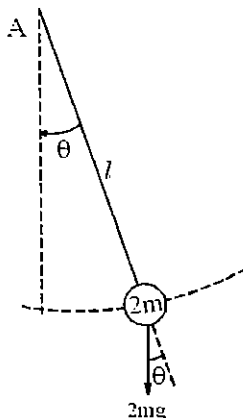
بقای انرژی بین موقعیت های ① و ② (نیروی کشش نخ همواره بر راستای جابه جایی اجرام عمود است و لذا کاری انجام نمی دهد):

$$\begin{cases} T_1 = \frac{1}{2} 2m v_1^2 = m \left(\frac{v_0}{2} \right)^2 = mg\ell \\ V_g)_1 = -2mg\ell \cos \theta_0 = -2mg\ell \cos \frac{\pi}{3} = -mg\ell \end{cases} \Rightarrow E_1 = T_1 + V_g)_1 = 0$$

$$\begin{cases} T_2 = \frac{1}{2} (2m) v_2^2 \\ V_g)_2 = -2mg\ell \cos \theta \end{cases} \Rightarrow E_2 = T_2 + V_g)_2 = m v_2^2 - 2mg\ell \cos \theta$$

$$E_1 = E_2 \Rightarrow \frac{v_2^2}{\ell} = 2g \cos \theta$$

قانون دوم نیوتن در راستای کشش نخ:



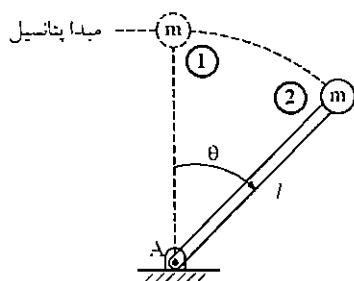
$$\Sigma F_n = 2ma_n$$

$$\Rightarrow T - 2mg \cos \theta = (2m) \frac{v_2^2}{\ell} = (2m)(2g \cos \theta) \Rightarrow T = 6mg \cos \theta$$

$$\Rightarrow T_{\max} = 6mg \text{ for } \theta = 0 \text{ می باشد. (۴)}$$

در حل این مسئله فرض شده که جرم m_2 به جرم m_1 می چسبد و هر دو با هم حول A دوران می کنند در صورتی که در بعضی مراجع فرض شده که پس از برخورد این دو از هم جدا شده و جرم m_2 به تنهایی حول A دوران می کند در این صورت جواب $T_{\max} = 3mg$ خواهد بود.

تست سال (۷۴ - ۷۵)



در شکل زیر جرم m به میله بدون وزنی به طول ℓ متصل است. اگر جرم را از موقعیت $\theta = 0$ رها کنیم، در چه زاویه ای نیروی فشاری در میله صفر می گردد؟

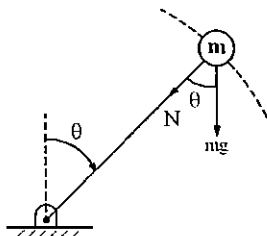
- | | |
|------------------|------------------|
| (۲) 48.2° | (۱) 45° |
| (۴) 60° | (۳) 56.4° |

چون نیروی وارده از میله به جرم همواره بر راستای جابه جایی جرم عمود است لذا کاری انجام نمی دهد و قانون بقای انرژی بین موقعیت های ① و ② برقرار است، لذا:

$$\begin{cases} T_1 = 0 \\ V_g \big|_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow E_1 = T_1 + V_g \big|_1 = 0$$

$$\begin{cases} T_2 = \frac{1}{2}mv^2 \\ V_g \big|_2 = -mg(\ell - \ell \cos \theta) \end{cases} \Rightarrow E_2 = T_2 + V_g \big|_2 = \frac{1}{2}mv^2 - mg\ell(1 - \cos \theta) = E_1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{v^2}{\ell} = 2g(1 - \cos \theta)$$



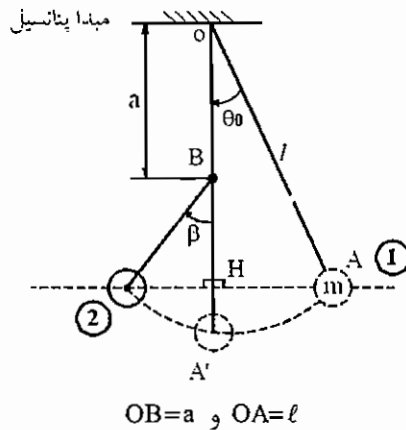
N: نیروی وارد از جرم به میله در راستای میله

$$\Sigma F_n = ma_n: \Rightarrow N + mg \cos \theta = \frac{mv^2}{\ell} = 2mg(1 - \cos \theta)$$

$$\Rightarrow N = mg(2 - 3 \cos \theta) = 0 \Rightarrow \cos \theta = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta = 48.2^\circ$$

جواب گزینه (۲) می باشد.

تست سال (۷۱ - ۷۰)



گلوله پاندول ساده با زاویه انحراف θ_0 از سکون رها می‌شود. میخی در نقطه B جلوی حرکت نصف نخ را (مطابق شکل) می‌گیرد. گلوله پاندول حداکثر چه زاویه‌ای را طی خواهد کرد؟

(۲) $\beta > \theta_0$

(۱) $\beta = \theta_0$

(۴) بستگی به محل میخ دارد.

(۳) $\beta < \theta_0$

چون راستای نیروی کشش نخ در کل مسیر بر راستای جابه‌جایی جرم m عمود است لذا کاری انجام نمی‌دهد و قانون بقای انرژی برقرار است.

$$\begin{cases} T_1 = 0 \\ V_g \big|_1 = -mg\ell \cos \theta_0 \end{cases} \Rightarrow E_1 = T_1 + V_g \big|_1 = -mg\ell \cos \theta_0$$

$$\begin{cases} T_2 = 0 & \text{پاندول حداکثر تا زاویه‌ای حرکت می‌کند که سرعت جرم صفر شود} \\ V_g \big|_2 = -[a + (\ell - a)\cos \beta]mg \end{cases} \Rightarrow E_2 = T_2 + V_g \big|_2 = -mg[a + (\ell - a)\cos \beta]$$

$$E_1 = E_2 \Rightarrow \ell \cos \theta_0 = a + (\ell - a)\cos \beta \xrightarrow{\text{if } a = \frac{\ell}{2}} \boxed{\cos \beta = 2 \cos \theta_0 - 1}$$

مطابق جدول برای $a = \frac{\ell}{2}$ می‌بایستی $\beta > \theta_0$ باشد. (مطابق شکل داریم π و $\theta_0 \neq 0$)

θ_0	30°	60°	90°
β	42.94°	90°	180°

$$\text{if } \theta_0 = \beta \Rightarrow \cos \theta_0 = \cos \beta \Rightarrow \ell \cos \theta_0 = a + (\ell - a)\cos \beta = \ell \cos \beta \Rightarrow a(1 - \cos \beta) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ \beta \neq \theta_0 \end{cases}$$

$$\text{if } \frac{\pi}{2} > \theta_0 > \beta \Rightarrow \cos \theta_0 < \cos \beta \text{ و } \ell \cos \theta_0 = a + (\ell - a)\cos \beta \Rightarrow a < a \cos \beta \Rightarrow 1 < \cos \beta \text{ امکان ندارد.}$$

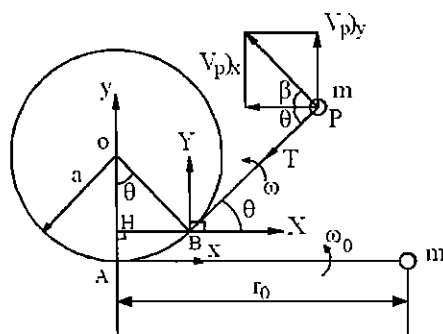
بستگی به محل میخ یعنی فاصله a یا $\theta_0 = \beta$ و یا $\theta_0 < \beta$ می‌باشد که با توجه به این که در صورت مساله $a = \frac{\ell}{2}$ می‌باشد همواره داریم $\theta_0 < \beta$ و لذا جواب گزینه (۲) می‌باشد.

قوانین بقا:

در این بخش سه قانون بقای انرژی و بقای اندازه حرکت خطی و بقای اندازه حرکت زاویه‌ای برای مثال‌های مختلفی بررسی می‌شود. بدیهی است که تمامی این قوانین از قانون دوم نیوتن با اعمال فرضیاتی به‌دست آمده و تمامی مسایلی که با این قوانین حل می‌شوند را می‌توان با قانون دوم نیوتن نیز حل نمود. منتها کاربرد این قوانین سبب حل ساده‌تر مسائل می‌گردد. در مثال‌های ذیل مسایلی مطرح

می‌باشد که برای آن‌ها یک یا چندین قانون بقا توأماً برقرار می‌باشد. با مقایسه این مثال‌ها می‌توان فهمید که در هر مورد از چه قانون بقایی برای حل مساله می‌توان استفاده نمود.

مثال (۱): جرم m به یک ریسمان متصل شده و ریسمان حول استوانه‌ای به شعاع a می‌پیچد به‌طوری‌که همواره ریسمان تحت کشش بوده و مسیر حرکت جرم در صفحه افق قرار دارد. چه رابطه‌ای برای سرعت زاویه‌ای ریسمان برقرار است؟ $BP=r$



هنگامی که ریسمان حول استوانه‌ای می‌پیچد طول ریسمان از r_0 به r تغییر می‌کند و به اندازه طول کمان AB یعنی $a\theta$ از طول ریسمان کاسته می‌شود بنابراین: $r=r_0-a\theta$

نخست سعی شود در این مثال مسیر حرکت جرم m بررسی گردد.

مختصات نقطه P در دستگاه مختصات BXY عبارت است از $(r \sin \theta, r \cos \theta)$ و مختصات نقطه B در دستگاه مختصات Axy ، $(BH=a \sin \theta, AH=a-a \cos \theta)$ می‌باشد. بنابراین مختصات نقطه P در دستگاه مختصات ثابت Axy که مشخص کننده مسیر حرکت نقطه P می‌باشد عبارت است از:

$$\begin{cases} x_P = a \sin \theta + r \cos \theta = a \sin \theta + (r_0 - a\theta) \cos \theta \\ y_P = a(1 - \cos \theta) + r \sin \theta = a(1 - \cos \theta) + (r_0 - a\theta) \sin \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} (v_P)_x = \dot{x}_P = a \dot{\theta} \cos \theta - a \dot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}(r_0 - a\theta) \sin \theta = -\dot{\theta} r \sin \theta \\ (v_P)_y = \dot{y}_P = a \dot{\theta} \sin \theta - a \dot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}(r_0 - a\theta) \cos \theta = \dot{\theta} r \cos \theta \end{cases}$$

$$v_P = \sqrt{[(v_P)_x]^2 + [(v_P)_y]^2} = r \dot{\theta}$$

$$\tan \beta = \frac{|(v_P)_y|}{|(v_P)_x|} = \left| \frac{r \dot{\theta} \cos \theta}{r \dot{\theta} \sin \theta} \right| = |\cot \theta| \Rightarrow \beta + \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{بنابراین بردار سرعت مسیر حرکت جرم به ریسمان عمود است.}$$

و اندازه سرعت جرم m برابر است با فاصله جرم تا نقطه تماس با استوانه و یا طول ریسمان (r) ضرب در سرعت زاویه‌ای ریسمان بنابراین نقطه تماس در هر لحظه همواره مرکز آنی دوران نقطه P خواهد بود.

مسیر حرکت جرم m که از معادلات پارامتری $(x_P(\theta), y_P(\theta))$ تبعیت می‌کند، یک منحنی می‌باشد که منحنی اینولوت نامیده می‌شود.

شعاع انحنای مسیر حرکت جرم m نیز به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y_P'' x_P' - x_P'' y_P'}{[(x_P')^2 + (y_P')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_p = -(r_0 - a)\sin\theta \\ \dot{y}_p = (r_0 - a)\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_p = a\sin\theta - (r_0 - a)\cos\theta \\ \ddot{y}_p = -a\cos\theta - (r_0 - a)\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{1}{r_0 - a} \Rightarrow \rho = r = r_0 - a$$

بنابراین شعاع انحنای مسیر نقطه P برابر است با r. به عبارت دیگر نقطه تماس مرکز انحنای مسیر نیز می‌باشد. بنابراین مثال مذکور حالت جالبی است که در آن $r = \rho$ (شعاع انحنای مسیر با شعاع دوران برابر است) ولی مسیر دایروی نمی‌باشد. تنها نیروی وارده به جرم نیروی کشش ریسمان و نیروی وزن می‌باشد. در دستگا قائم و مماسی داریم:

$$\begin{cases} \Sigma F_n = ma_n \Rightarrow T = ma_n = m \frac{v^2}{r} = \frac{m(r\omega)^2}{r} = mr\omega^2 \Rightarrow \boxed{T = mr\omega^2} \\ \Sigma f_t = ma_t \Rightarrow a_t = \dot{v} = 0 \Rightarrow v = r\omega = \text{constant} \Rightarrow \boxed{r_0\omega_0 = r\omega} \end{cases}$$

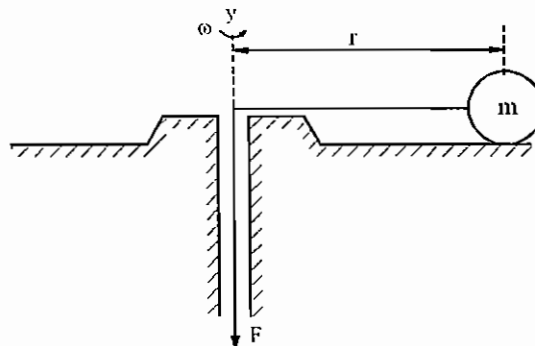
در جهت عمود بر ریسمان هیچ نیروی خارجی به جرم وارد نمی‌شود. اگر جرم سوراخی داشت و به جای ریسمان یک میله از داخل آن عبور می‌کرد در این صورت نیروی عکس‌العمل بین میله و جرم به عنوان نیروی عمود بر میله یا ΣF_t وجود داشت.

مساله فوق به‌وسیله قانون دوم نیوتن به‌طور کامل تحلیل شد. سؤال این است که چگونه همین مساله را می‌توانستیم به کمک قوانین بقا ساده‌تر حل کنیم. از آنجایی که نیروی کشش همواره به مسیر حرکت جرم m عمود است (سرعت همواره مماس بر مسیر است و عمود بر راستای کشش نخ) لذا هیچ کاری انجام نمی‌دهد. بنابراین کار نیروی کشش، صفر است. از طرفی جرم m در صفحه افقی حرکت می‌کند لذا انرژی پتانسیلی ثقلی آن تغییر نمی‌کند. بنابراین قانون بقای انرژی مکانیکی برقرار است و متعاقب آن انرژی جنبشی نیز بقا خواهد داشت.

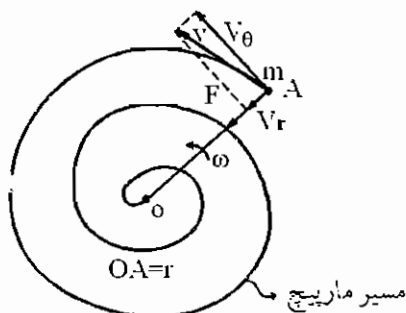
$$\Delta E = \Delta T + \Delta V_g = 0 \xrightarrow{\Delta V_g = 0} \Delta T = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v_0 = v \Rightarrow \boxed{r_0\omega_0 = r\omega}$$

بنابراین در این مساله قانون بقای انرژی نیز نتیجه مشابهی با نتیجه به‌دست آمده از قانون دوم نیوتن ارائه می‌دهد. چون $v_0 = v$ لذا $mv_0 = mv$ و یا $G_0 = G$ ، نکته‌ای که باید توجه داشت، آن است که به ظاهر قانون بقای اندازه حرکت خطی نیز برقرار است. ولی این قانون زمانی مطرح می‌باشد که جمع نیروها در یک راستای ثابت، صفر باشد که در این صورت اندازه حرکت خطی در آن راستا بقا خواهد داشت. ولی در این مثال راستای \vec{G}_0 و \vec{G} تغییر می‌کند و لزوماً نمی‌توان برقراری این قانون را با دلایل فیزیکی توجیه نمود.

مثال (۲): جرم m توسط یک ریسمان که از سوراخ یک صفحه عبور کرده با نیروی F کشیده می‌شود. جرم m حول سوراخ با سرعت زاویه‌ای ω دوران می‌کند و به سوراخ نیز نزدیک می‌شود لذا جرم مسیر مارپیچی مطابق شکل را طی می‌کند. کار نیروی F را محاسبه کنید.



جرم m علاوه بر چرخش حول محور y به محل سوراخ نیز نزدیک می‌شود لذا دارای دو مولفه سرعت می‌باشد. یکی در راستای عمود بر ریسمان که سبب چرخش جرم حول سوراخ می‌شود ($v_\theta = r\omega$) و مولفه دیگر سرعت به دلیل نزدیک شدن جرم به محل سوراخ ایجاد می‌شود و در جهت ریسمان می‌باشد. ($v_r = \dot{r}$)



راستای نیروی کشش نخ در راستای سرعت دارای مولفه می‌باشد لذا نمی‌توان فرض نمود که جمع نیروها در راستای سرعت صفر است. لذا قانون بقای اندازه حرکت خطی برقرار نیست. از طرفی راستای نیروی F بر راستای سرعت عمود نمی‌باشد. لذا نیروی F کار انجام می‌دهد و قانون بقای انرژی نیز برقرار نیست.

راستای نیروی F همواره از سوراخ می‌گذرد لذا گشتاور نیروی F حول سوراخ یا محور y صفر است. بنابراین قانون بقای اندازه حرکت زاویه‌ای برقرار است.

$$H_y)_1 = H_y)_2$$

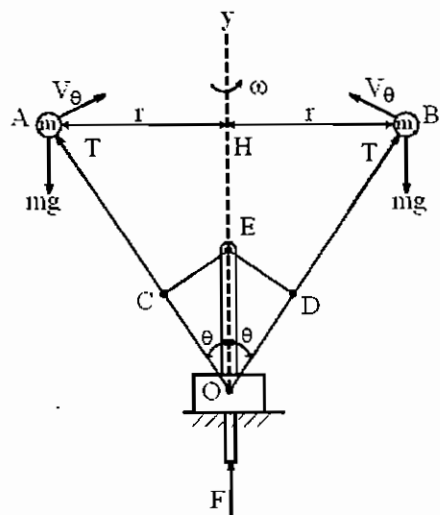
از طرفی:

$$\vec{r} \times \vec{v} = \vec{r} \times (\vec{v}_r + \vec{v}_\theta) = \vec{r} \times \vec{v}_r + \vec{r} \times \vec{v}_\theta \quad \xrightarrow{\vec{r} \parallel \vec{v}_r} \quad = \vec{r} \times \vec{v}_\theta$$

$$\Rightarrow |\vec{H}_y| = |\vec{r} \times m \vec{v}| = |\vec{r} \times m \vec{v}_\theta| = m r v_\theta = m r (r \omega) = m r^2 \omega \Rightarrow \boxed{r_1^2 \omega_1 = r_2^2 \omega_2} \Rightarrow \boxed{r_1^2 \omega_1 = r_2^2 \omega_2}$$

$$(F \text{ کار نیروی}) W_F = \Delta T + \Delta V_g = \Delta T = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m \left\{ [v_\theta]_2^2 + [v_r]_2^2 \right\} - \frac{1}{2} m \left\{ [v_\theta]_1^2 + [v_r]_1^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{2} m \left[(r_2 \omega_2)^2 + (\dot{r}_2)^2 \right] - \frac{1}{2} m \left[(r_1 \omega_1)^2 + (\dot{r}_1)^2 \right]$$

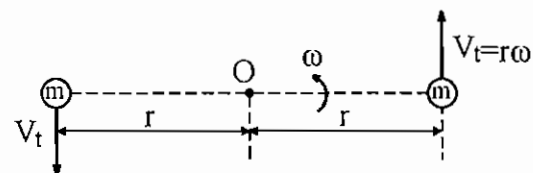


مثال (۳): گاورنر وسیله‌ای است که برای کنترل دور به کار می‌رود. دو جرم m در نقاط A و B قرار دارند و حول محور y دوران می‌کنند. اجرام به ترتیب بر سر میله‌های OA و OB به طول ثابت ℓ قرار دارند، هنگامی که سرعت دوران ω افزایش می‌یابد، نیروهای گریز از مرکز هر جرم، $m r \omega^2$ افزایش یافته و دو جرم از هم دور می‌شوند یعنی میله‌های OA و OB حول O دوران کرده و زاویه θ افزایش می‌یابد. در اثر این عمل نقاط C و D نیز از هم دور شده و میله‌های ED و CE سبب می‌شوند تا نقطه E و میله گذرنده از این نقطه پایین بیاید و به کمک آن می‌توان ورودی سوخت یا بخار یا هر منبع تغذیه دیگر را کنترل نمود تا از افزایش دور جلوگیری نماید.

چه رابطه‌ای بین سرعت‌های زاویه‌ای ω در موقعیت‌های مختلف اجرام وجود دارد؟
 از آنجایی که نقطه O ثابت می‌باشد لذا مکان هندسی نقاط B و A و یا مسیر حرکت اجرام A و B یک مارپیچ در کره‌ای به مرکز O و شعاع ℓ خواهد بود.

تنها نیروهای وارده بر اجرام نیروهای mg و T (نیروی محوری وارده از میله به جرم m) هستند. این نیروها حول محور y گشتاوری ندارند. لذا قانون بقای اندازه حرکت زاویه‌ای حول محور y برقرار است.

جرم m دارای دو مؤلفه سرعت v_θ و v_t می‌باشد چرا که هم حول O دوران می‌کند و هم حول محور y دوران می‌کند.



جرم m دارای دو مؤلفه سرعت v_θ و v_t می‌باشد چرا که هم حول O

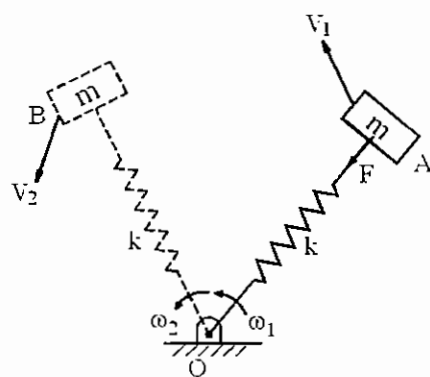
دوران می‌کند و هم حول محور y دوران می‌کند.

$$H_y = \hat{\lambda} \cdot (\vec{r} \times m \vec{v}) = \hat{\lambda} \cdot [\vec{r} \times m(\vec{v}_\theta + \vec{v}_t)]$$

که در آن $\hat{\lambda}$ برداریکه در جهت محور y می‌باشد و بردار $\vec{HB} = \vec{r}$ می‌باشد. بردار $\vec{r} \times \vec{v}_\theta$ بر بردار \vec{r} عمود است لذا بر $\hat{\lambda}$ نیز عمود است و بنابراین $(\vec{r} \times \vec{v}_\theta) \cdot \hat{\lambda} = 0$ خواهد بود. از طرفی بردار \vec{v}_t بر \vec{r} عمود است و $\vec{r} \times \vec{v}_t$ هم جهت با $\hat{\lambda}$ می‌باشد.

$$H_y = m \hat{\lambda} \cdot (\vec{r} \times \vec{v}_t) = m r v_t = m r (r \omega) = m r^2 \omega$$

$$\Rightarrow (H_y)_1 = (H_y)_2 \Rightarrow r_1^2 \omega_1 = r_2^2 \omega_2 \xrightarrow{r = \ell \sin \theta} \boxed{\omega_1 \sin^2 \theta_1 = \omega_2 \sin^2 \theta_2}$$



مثال (۴): جرم m بر روی یک صفحه افقی بدون اصطکاک قرار دارد و به یک

فنر با ثابت k که در نقطه O ثابت می‌باشد متصل گردیده است. جرم با سرعت اولیه v_1 شروع به حرکت می‌کند و به موقعیت دیگر می‌رود که سرعت در این موقعیت v_2 می‌باشد. رابطه بین سرعت‌های v_1 و v_2 را بیابید.

تنها نیروی صفحه‌ای وارده بر جرم m نیروی پایستار فنر می‌باشد (نیروی وزن با عکس‌العمل سطح خنثی می‌شود) که امتداد آن همواره از نقطه O می‌گذرد و لذا گشتاور این نیرو حول O صفر می‌باشد و در نتیجه قانون بقای اندازه حرکت زاویه‌ای حول این نقطه برقرار است. یعنی:

$$(\vec{H}_O)_1 = (\vec{H}_O)_2$$

بردار سرعت \vec{v} جرم m دارای دو مؤلفه سرعت می‌باشد. یک مولفه در راستای فنر v_r (چون فنر می‌تواند کشیده و یا فشرده شود و جرم m به نقطه O دور یا نزدیک خواهد شد) و دیگری در راستای عمود بر فنر v_θ (چون فنر حول نقطه O دوران می‌کند).

$$v_r = \dot{r} \text{ و } v_\theta = r \omega$$

$$\vec{H}_O = \vec{r} \times m \vec{v} = m \vec{r} \times (\vec{v}_r + \vec{v}_\theta) = m (\vec{r} \times \vec{v}_r + \vec{r} \times \vec{v}_\theta) \xrightarrow{\vec{r} \times \vec{v}_r = \vec{0}} = m \vec{r} \times \vec{v}_\theta \Rightarrow H_O = m |\vec{r} \times \vec{v}_\theta| = m r v_\theta$$

$$\Rightarrow H_O = m r (r \omega) = m r^2 \omega \Rightarrow (H_O)_1 = (H_O)_2 \Rightarrow \boxed{r_1^2 \omega_1 = r_2^2 \omega_2}$$

از طرفی نیروی F تنها نیروی صفحه‌ای پایستار است لذا قانون بقای انرژی مکانیکی نیز برقرار است و چون حرکت در صفحه افقی است لذا انرژی پتانسیل ثقلی تغییر نمی‌کند و بنابراین:

$$\Delta T + \Delta V_e = 0 \Rightarrow (T_1 + V_e)_1 = (T_2 + V_e)_2 \Rightarrow \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} k (r_1 - \ell)^2 = \frac{1}{2} m v_2^2 + \frac{1}{2} k (r_2 - \ell)^2$$

که در آن r_1 و r_2 به ترتیب طول‌های اولیه و ثانویه فنر و ℓ طول آزاد فنر می‌باشد. و نیز:

$$\Rightarrow v_1^2 = (\dot{r}_1)^2 + (r_1 \omega_1)^2, \quad v_2^2 = (\dot{r}_2)^2 + (r_2 \omega_2)^2$$

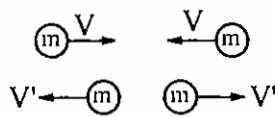
تست سال (۷۸ - ۷۷)

قانون بقای انرژی و قانون بقا منتهم خطی دو قانون مستقل هستند. آیا امکان دارد با هم در یک مورد به توافق برسند؟
(۱) امکان دارد.

(۲) فقط به علت تصادف است که همیشه همدیگر را تایید می کنند.

(۳) همیشه همدیگر را تایید می کنند.

(۴) یکی از دیگری قابل به دست آوردن است.



امکان دارد در یک مورد هر دو قانون به توافق برسند به عنوان مثال در برخورد الاستیک کامل دو جرم مساوی m قانون بقای اندازه حرکت خطی برای دو جرم در راستای ضربه برقرار است یعنی داریم: $mv - mv = mv' - mv'$ (چون برخورد الاستیک کامل است).

از طرفی:

$$v = v' \Rightarrow 2\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = 2\left(\frac{1}{2}mv'^2\right) \Rightarrow T = T' \Rightarrow$$

یعنی قانون بقای انرژی نیز برقرار است.

بنابراین جواب گزینه (۱) می باشد.

فصل چهارم

دینامیک اجسام صلب

حرکت صفحه‌ای

هنگامی که صحبت از جسم صلب به میان می‌آید. سه نوع حرکت مطرح می‌باشد.

الف) حرکت انتقالی:

در این حرکت تمامی نقاط جسم صلب دارای سرعت خطی یکسان هستند و بردار سرعت نقاط مختلف جسم هم‌سنگ یکدیگر می‌باشند در این صورت قانون دوم نیوتن به صورت زیر خواهد بود.

که در آن \vec{F} شتاب مرکز ثقل جسم صلب می‌باشد.

$$\vec{F} = m\vec{a}_G$$

ب) حرکت دورانی:

در این حرکت جسم حول یک نقطه ثابت دوران می‌کند و هر نقطه جسم دارای سرعت خطی است که از حاصل ضرب شعاع دوران (فاصله نقطه مورد نظر تا مرکز دائمی دوران) در سرعت زاویه‌ای جسم صلب به دست می‌آید. قانون دوم نیوتن برای حرکت صفحه‌ای به صورت زیر به دست می‌آید.

$$M_0 = I_0 \alpha \quad (\text{جمع گشتاور نیروهای خارجی وارده به جسم صلب حول نقطه } O)$$

که در آن I_0 لختی یا ممان اینرسی قطبی جسم حول نقطه O می‌باشد و α شتاب زاویه‌ای جسم صلب می‌باشد.

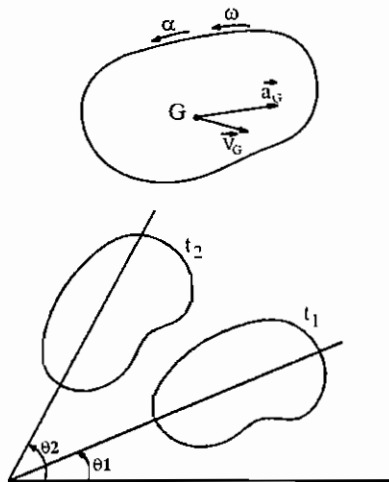
در مورد این رابطه و مفهوم سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای جسم صلب بعداً توضیح داده می‌شود.

ج) حرکت عمومی:

حرکتی است که جسم هم دارای انتقال و هم دوران می‌باشد. به عبارت دیگر در حالت کلی هم مرکز جرم جسم، دارای سرعت و شتاب خطی است و هم جسم دارای سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای است. سرعت و شتاب زاویه‌ای جسم بدین صورت تعریف می‌شود که در ابتدا یک خط ثابت بر روی جسم صلب در نظر گرفته می‌شود و سپس تغییرات زاویه این خط ثابت نسبت به یک خط مرجع سنجیده می‌شود.

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\theta_2 - \theta_1}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t} = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$$



قانون دوم نیوتن در این حالت به صورت زیر می‌باشد.

$$\vec{F} = m \vec{a}_G$$

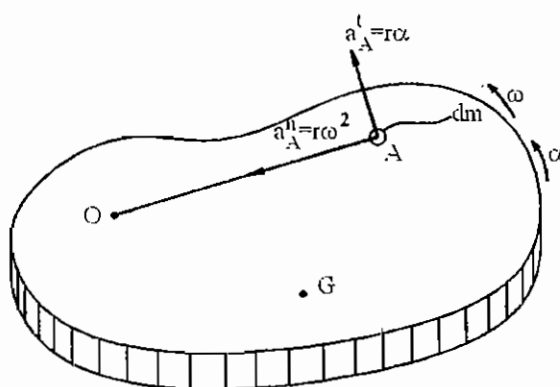
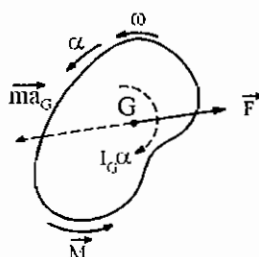
$$M_G = I_G \alpha$$

که در آن I_G لختی یا ممان اینرسی قطبی جسم صلب نسبت به مرکز جرم (G) می‌باشد.

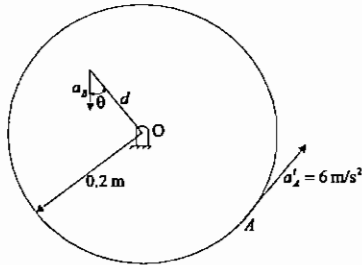
اصل دالامبر:

برای جسم صلب جهت ایجاد یک تعادل ساختگی (تعادل شبه استاتیکی) نیروی اینرسی $-m\vec{a}_G$ و گشتاور اینرسی $-I_G\alpha$ را به سیستم اعمال می‌کنیم. در این صورت جمع نیروها و گشتاورها وارده به جسم صفر خواهد بود.

در بخش سینماتیک ذرات مشاهده شد که دستگاهای چرخان در حضور یک جسم صلب متصل به آن انتخاب می‌شوند به عبارت دیگر سینماتیک جسم صلب قبلاً مورد بررسی قرار گرفته است و در این جا تنها به ذکر چند تست نمونه اکتفا می‌شود



در شکل مقابل دیسک حول نقطه O دوران می‌کند اگر زاویه θ معلوم باشد $\left(\tan \theta = \frac{3}{4}\right)$ سرعت نقطه A برابر است با؟



$$V_A = 0.2\sqrt{10} \left[\frac{m}{s} \right] \quad (2)$$

$$V_A = 0.3\sqrt{10} \left[\frac{m}{s} \right] \quad (4)$$

$$V_A = 0.4\sqrt{10} \left[\frac{m}{s} \right] \quad (1)$$

$$V_A = 0.1\sqrt{10} \left[\frac{m}{s} \right] \quad (3)$$

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

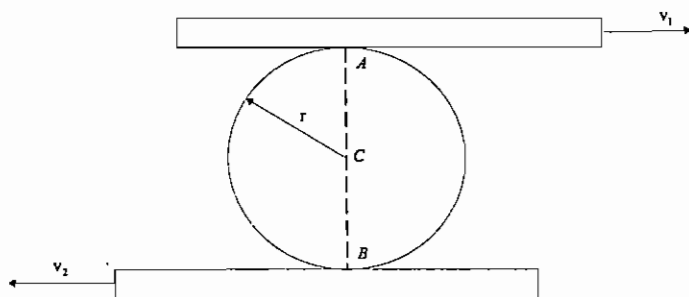
$$\begin{cases} a_B^n = \frac{v_B^2}{d} = \frac{(d\omega)^2}{d} = d\omega^2 = a_B \cos \theta \\ d_B^t = \dot{v}_B = (d\omega) = d\dot{\omega} = d\alpha = a_B \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \frac{d\omega^2}{d\alpha} = \frac{a_B \cos \theta}{a_B \sin \theta} \Rightarrow \frac{\alpha}{\omega^2} = \tan \theta = \frac{3}{4}$$

$$v_B = d\omega$$

$$a_A^t = \dot{v}_A = (0.2\omega) = 0.2\dot{\omega} = 0.2\alpha = 6 \Rightarrow \alpha = \frac{6}{0.2} = 30 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \right] \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{4}{3}\alpha} = \sqrt{\frac{4}{3} \times 30} = 2\sqrt{10} \Rightarrow v_A = 0.2\omega = 0.2(2\sqrt{10}) = 0.4\sqrt{10} = 1.265 \left[\frac{m}{s} \right]$$

اگر در نقاط تماس دیسک و صفحات غلتش محض داشته باشیم سرعت زاویه‌ای دیسک چقدر است. ($v_1 > v_2$)



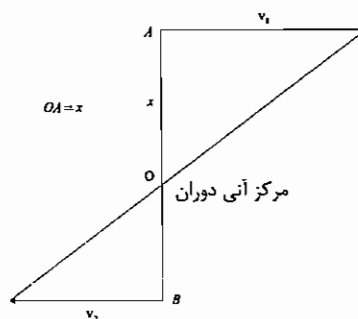
$$\omega_{\text{disk}} = \frac{2r}{v_1 + v_2} \quad (1)$$

$$\omega_{\text{disk}} = \frac{v_1 - v_2}{2r} \quad (2)$$

$$\omega_{\text{disk}} = \frac{v_1 + v_2}{2r} \quad (3)$$

$$\omega_{\text{disk}} = \frac{2r}{v_1 - v_2} \quad (4)$$

حل: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.



$$\begin{cases} v_1 = x\omega_{\text{disk}} \\ v_2 = (2r - x)\omega_{\text{disk}} \end{cases} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{x}{2r - x} \Rightarrow 2v_1r - v_1x = v_2x \Rightarrow x = \frac{2v_1r}{v_1 + v_2}$$

$$\Rightarrow \omega_{\text{disk}} = \frac{v_1}{x} = \frac{v_1}{\frac{2v_1r}{v_1 + v_2}} = \frac{v_1 + v_2}{2r} \Rightarrow \boxed{\omega_{\text{disk}} = \frac{v_1 + v_2}{2r}}$$

قانون‌های بقا ارایه شده برای ذره می‌تواند برای جسم صلب نیز به کار رود منتها می‌بایستی روابطی ارایه گردد که بتوان گشتاور و اندازه حرکت زاویه‌ای و خطی و انرژی جنبشی را برای جسم صلب به دست آورد. این روابط به صورت زیر به دست می‌آیند.

الف) جسم حول نقطه ثابت O (مرکز دائمی دوران) دوران می‌کند:

یک المان جرم dm روی جسم صلب در نظر گرفته می‌شود. مولفه‌های شتاب المان a_A^l و a_A^n است.

بنابراین نیروهای وارده به این المان dma_A^l و dma_A^n می‌باشند. که تنها نیروی dma_A^l حول نقطه O گشتاور دارد.

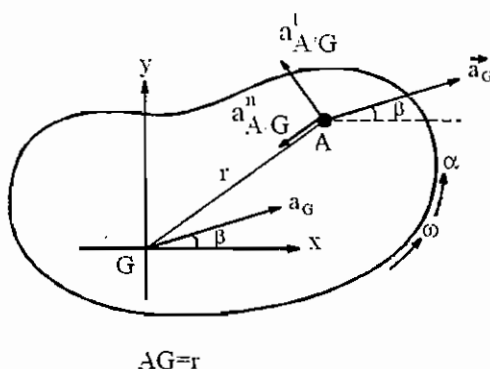
$$dM_O = r(dm\alpha) = r(dm)a_A^l = (r^2 dm)\alpha \Rightarrow M_O = \alpha \int r^2 dm = I_O \alpha$$

که رابطه بالا $I_O = \int r^2 dm$ لختی دورانی یا ممان اینرسی جرمی قطبی حول نقطه O نامیده می‌شود. بنابراین گشتاور حول نقطه دائمی دوران از رابطه $M_O = I_O \alpha$ محاسبه می‌شود. از طرفی می‌دانیم $M_O = \dot{H}_O$ که در آن H_O اندازه حرکت زاویه‌ای جسم صلب حول نقطه O می‌باشد.

$$M_O = \dot{H}_O = I_O \alpha = I_O \dot{\omega} \Rightarrow H_O = I_O \omega$$

ب) جسم دارای حرکت عمومی است:

المان جرم dm واقع در نقطه A در نظر بگیرید. مولفه‌های شتاب نقطه A، $a_{A/G}^l = r\alpha$ و $a_{A/G}^n = \frac{v_{A/G}^2}{AG} = r\omega^2$ و \vec{a}_G خواهند بود چرا که $\vec{a}_A = \vec{a}_G + \vec{a}_{A/G}^l + \vec{a}_{A/G}^n$ می‌باشد. بنابراین نیروهای وارده به المان dm و dma_G و $r\alpha dm$ و $r\omega^2 dm$ می‌باشند. چون راستای نیروی $r\omega^2 dm$ از نقطه G می‌گذرد هیچ گشتاوری حول نقطه G ندارد و گشتاور نیروهای dma_G و $r\alpha dm$ حول نقطه G عبارت است از:



$$AG = r$$

$$dM_G = r(r\alpha dm) - (dma_G \cos \beta) y_A + (dma_G \sin \beta) x_A$$

نیروی dma_G دارای دو مولفه‌های در جهت محورهای x و y می‌باشد که عبارتند از $dma_G \cos \beta$ و $dma_G \sin \beta$ می‌باشد و گشتاور این مولفه‌ها مطابق رابطه بالا محاسبه می‌شوند.

$$M_G = \alpha \int r^2 dm - a_G \cos \beta \int y_A dm + a_G \sin \beta \int x_A dm$$

مختصات مرکز جرم جسم صلب از روابط زیر به دست می آید.

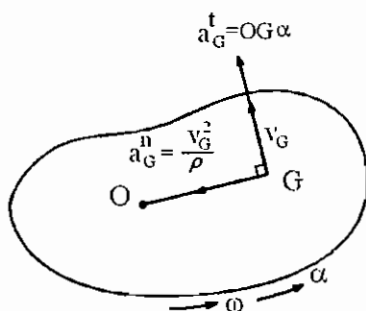
$$\begin{cases} x_G = \frac{\int x_A dm}{\int dm} = 0 \\ y_G = \frac{\int y_A dm}{\int dm} = 0 \end{cases}$$

بنابراین با توجه به روابط بالا رابطه $M_G = I_G \alpha$ به دست می آید.

$$M_G = \dot{H}_G = I_G \alpha = I_G \dot{\omega} \Rightarrow \boxed{H_G = I_G \omega}$$

اگر روابط گشتاور و اندازه حرکت زاویه ای حول نقطه ای دلخواه (O) نوشته شوند روابط اندکی پیچیده تر روابط بالا خواهد بود. ترم $m \bar{v}_G$ اندازه حرکت خطی مرکز جرم جسم صلب و ترم $m \bar{a}_G$ نیروی اینرسی مرکز جرم جسم صلب به صورت زیر می باشد.

$$\begin{aligned} \bar{H}_O &= \bar{H}_G + \overrightarrow{OG} \times (m \bar{v}_G) \\ \bar{M}_O &= \bar{M}_G + \overrightarrow{OG} \times (m \bar{a}_G) \end{aligned}$$



ج) اگر مرکز آنی دوران جسم مشخص باشد (نقطه O):

در این حالت روابط بالا ساده می شوند.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG} \times m \bar{a}_G &= m \overrightarrow{OG} \times (\bar{a}_G^t + \bar{a}_G^n) = m (\overrightarrow{OG} \times \bar{a}_G^t + \overrightarrow{OG} \times \bar{a}_G^n) \xrightarrow{\overrightarrow{OG} \parallel \bar{a}_G^n} \\ \overrightarrow{OG} \times m \bar{a}_G &= m \overrightarrow{OG} \times \bar{a}_G^t \Rightarrow |\overrightarrow{OG} \times m \bar{a}_G| = m OG a_G^t = m OG^2 \alpha \end{aligned}$$

در رابطه بالا به جای $a_G^t = \dot{v}_G = (\alpha, \dot{\omega})$ مقدار $OG \dot{\omega} = OG \alpha$ جایگزین شده است و این جایگذاری زمانی صادق است که OG ثابت باشد. مثلاً در غلتش دیسک دایروی همگن که مرکز دیسک مرکز جرم می باشد فاصله مرکز دیسک تا مرکز آنی دوران یا نقطه تماس همواره ثابت است.

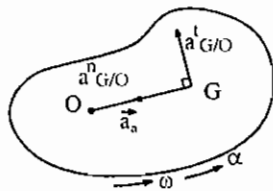
$$\begin{aligned} \Rightarrow \overrightarrow{OG} \times m \bar{a}_G &= m OG^2 \alpha \hat{k} \Rightarrow \bar{M}_O = M_O \hat{k} = \bar{M}_G + \overrightarrow{OG} \times m \bar{a}_G = M_G \hat{k} + m OG^2 \alpha \hat{k} \Rightarrow M_O = I_G \alpha + m OG^2 \alpha \\ \Rightarrow M_O &= (I_G + m OG^2) \alpha = I_O \alpha \Rightarrow \boxed{M_O = I_O \alpha} \Rightarrow M_O = \dot{H}_O = I_O \alpha = I_O \dot{\omega} \Rightarrow \boxed{H_O = I_O \omega} \end{aligned}$$

د) اگر روابط گشتاور و اندازه حرکت زاویه ای حول نقطه ای (O) نوشته شود که امتداد سرعت و شتاب آن

نقطه از مرکز جرم بگذرد:

اگر امتداد شتاب نقطه O از مرکز جرم G بگذرد $\overrightarrow{OG} \parallel \bar{a}_O$ خواهد بود در این حالت نتیجه می شود:

$$\begin{aligned} \bar{a}_G &= \bar{a}_O + \bar{a}_{G/O} = \bar{a}_O + \bar{a}_{G/O}^n + \bar{a}_{G/O}^t \Rightarrow \overrightarrow{OG} \times \bar{a}_G = \overrightarrow{OG} \times (\bar{a}_O + \bar{a}_{G/O}^n + \bar{a}_{G/O}^t) = \overrightarrow{OG} \times \bar{a}_O + \overrightarrow{OG} \times \bar{a}_{G/O}^n + \overrightarrow{OG} \times \bar{a}_{G/O}^t \\ \xrightarrow{\overrightarrow{OG} \times \bar{a}_O = \vec{0}, \overrightarrow{OG} \times \bar{a}_{G/O}^n = \vec{0}} \quad \overrightarrow{OG} \times \bar{a}_G &= \overrightarrow{OG} \times \bar{a}_{G/O}^t \Rightarrow |\overrightarrow{OG} \times \bar{a}_G| = |\overrightarrow{OG} \times \bar{a}_{G/O}^t| = OG a_{G/O}^t = OG (OG \alpha) = OG^2 \alpha \end{aligned}$$



$$\Rightarrow \overline{OG} \times \bar{a}_G = OG^2 \alpha \hat{k}$$

$$\bar{M}_O = \bar{M}_G + \overline{OG} \times (m \bar{a}_G) \Rightarrow M_O \hat{k} = M_G \hat{k} + m OG^2 \alpha \hat{k}$$

$$\Rightarrow M_O = M_G + m OG^2 \alpha = I_G \alpha + OG^2 \alpha = (I_G + m OG^2) \alpha = I_O \alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{M_O = I_O \alpha}$$

به طور مشابه اگر امتداد سرعت نقطه O از مرکز جرم G بگذرد، $\overline{OG} \parallel \bar{v}_O$ خواهد بود و در این حالت نتیجه می شود:

$$\bar{v}_G = \bar{v}_O + \bar{v}_{G/O} \Rightarrow \overline{OG} \times \bar{v}_G = \overline{OG} \times (\bar{v}_O + \bar{v}_{G/O}) = \overline{OG} \times \bar{v}_O + \overline{OG} \times \bar{v}_{G/O} \xrightarrow{\overline{OG} \times \bar{v}_O = \vec{0}} \overline{OG} \times \bar{v}_G = \overline{OG} \times \bar{v}_{G/O}$$

$$\Rightarrow |\overline{OG} \times \bar{v}_G| = |\overline{OG} \times \bar{v}_{G/O}| = OG v_{G/O} = OG (OG \omega) = OG^2 \omega \Rightarrow \overline{OG} \times \bar{v}_G = OG^2 \omega \hat{k}$$

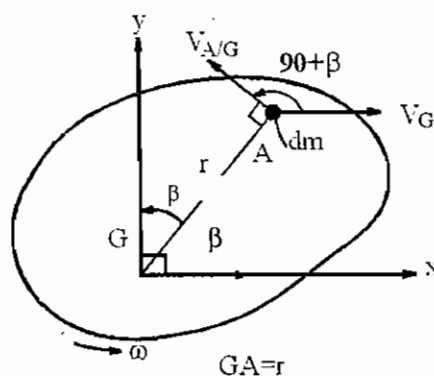
$$\Rightarrow \bar{H}_O = \bar{H}_G + \overline{OG} \times (m \bar{v}_G) \Rightarrow H_O \hat{k} = H_G \hat{k} + m OG^2 \omega \hat{k} \Rightarrow H_O = H_G + m OG^2 \omega = I_G \omega + m OG^2 \omega$$

$$\Rightarrow H_O = (I_G + m OG^2) \omega = I_O \omega \Rightarrow \boxed{H_O = I_O \omega}$$

انرژی جنبشی:

$$\bar{v}_A = \bar{v}_G + \bar{v}_{A/G}$$

الف) جسم دارای حرکت عمومی است:



المان جرم dm را در نقطه A در نظر بگیرید. سرعت نقطه A مجموع دو بردار سرعت \bar{v}_G و $\bar{v}_{A/G}$ که با یکدیگر زاویه $90 + \beta$ می سازند می باشد.

$$v_A^2 = v_G^2 + v_{A/G}^2 + 2 v_G v_{A/G} \cos(90 + \beta) = v_G^2 + (r\omega)^2 - 2 v_G r \omega \sin \beta$$

انرژی جنبشی المان عبارت است از:

$$dT = \frac{1}{2} dm v_A^2 = \frac{1}{2} dm (v_G^2 + r^2 \omega^2 - 2 v_G \omega r \sin \beta) \xrightarrow{r \sin \beta = x_A} dT = \frac{1}{2} dm (v_G^2 + r^2 \omega^2 - 2 v_G \omega x_A)$$

$$\Rightarrow T = \int dT = \frac{1}{2} \int v_G^2 dm + \frac{\omega^2}{2} \int r^2 dm - 2 v_G \omega \int x_A dm = \frac{m}{2} v_G^2 + \frac{I_G \omega^2}{2} - 2 v_G \omega \int x_A dm$$

$$x_G = 0 = \frac{\int x_A dm}{\int dm} \Rightarrow \int x_A dm = 0$$

از طرفی:

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m V_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2 = \text{انرژی جنبشی دورانی} + \text{انرژی جنبشی انتقالی}$$

ب) جسم دارای مرکز دورانی است:

اگر O مرکز دائمی دوران یا مرکز آنی دوران جسم صلب باشد $V_G = OG \omega$ خواهد بود و لذا:

$$T = \frac{1}{2} m (OG \omega)^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2 = \frac{1}{2} (m OG^2 + I_G) \omega^2 = \frac{1}{2} I_O \omega^2 \Rightarrow T = \frac{1}{2} I_O \omega^2$$

جمع‌بندی:

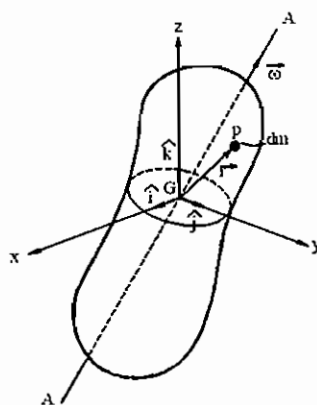
۱) رابطه گشتاور برای یک جسم صلب حول نقطه O که در آن O مرکز دائمی دوران یا مرکز آنی دوران یا مرکز جرم یا نقطه‌ای باشد که امتداد شتاب آن نقطه از مرکز جرم می‌گذرد برابر است با حاصل ضرب ممان اینرسی حول آن نقطه ضرب در شتاب زاویه‌ای جسم صلب ($M_O = I_O \alpha$).

۲) رابطه اندازه حرکت زاویه‌ای برای یک جسم صلب حول نقطه O که در آن O مرکز دائمی دوران یا مرکز آنی دوران یا مرکز جرم یا نقطه‌ای باشد که امتداد سرعت آن نقطه از مرکز جرم می‌گذرد برابر است با حاصل ضرب ممان اینرسی حول آن نقطه ضرب در سرعت زاویه‌ای جسم صلب ($H_O = I_O \omega$).

۳) انرژی جنبشی در حالت کلی مجموع انرژی جنبشی انتقالی ($\frac{1}{2} m V_G^2$) و انرژی جنبشی دورانی ($\frac{1}{2} I_G \omega^2$) می‌باشد. در حالت خاص می‌تواند به صورت $T = \frac{1}{2} I_O \omega^2$ بیان شود که O مرکز دائمی یا آنی دوران می‌باشد.

۴) اگر O یک نقطه دلخواه باشد رابطه گشتاور و اندازه حرکت زاویه‌ای به صورت زیر می‌باشند.

$$\begin{aligned} \vec{M}_O &= \vec{M}_G + \vec{OG} \times (m \vec{a}_G) \\ \vec{H}_O &= \vec{H}_G + \vec{OG} \times (m \vec{V}_G) \end{aligned}$$



تحلیل سه بعدی:

جسم صلب سه بعدی که حول محور A-A گذرنده از مرکز جرم جسم با سرعت زاویه‌ای $\vec{\omega}$ می‌چرخد در نظر گرفته می‌شود. بنابراین سرعت مرکز جرم G صفر خواهد بود و سرعت نقطه P که در آن المان جرم dm قرار دارد $\vec{V}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}$ خواهد بود.

$dH_G = \vec{r} \times dm \vec{V}_P = \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm$ (اندازه حرکت زاویه‌ای المان حول نقطه G)

که در آن $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ و $\vec{\omega} = \omega_x\hat{i} + \omega_y\hat{j} + \omega_z\hat{k}$ می‌باشد.

$$\vec{H}_G = \int \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm = ?$$

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \hat{i}(z\omega_y - y\omega_z) + \hat{j}(x\omega_z - z\omega_x) + \hat{k}(y\omega_x - x\omega_y)$$

$$\begin{aligned}\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ z\omega_y - y\omega_z & x\omega_z - z\omega_x & y\omega_x - x\omega_y \end{vmatrix} \\ &= \hat{i} [y(y\omega_x - x\omega_y) - z(x\omega_z - z\omega_x)] + \hat{j} [z(z\omega_y - y\omega_z) - x(y\omega_x - x\omega_y)] + \hat{k} [x(x\omega_z - z\omega_x) - y(z\omega_y - y\omega_z)] \\ &= \hat{i} [\omega_x(y^2 + z^2) - xy\omega_y - xz\omega_z] + \hat{j} [\omega_y(z^2 + x^2) - xy\omega_x - yz\omega_z] + \hat{k} [(x^2 + y^2)\omega_z - yz\omega_y - xz\omega_x] \Rightarrow \\ \vec{H}_G &= \hat{i} \left[\omega_x \int (y^2 + z^2) dm - \omega_y \int xy dm - \omega_z \int xz dm \right] + \hat{j} \left[-\omega_x \int xy dm + \omega_y \int (x^2 + z^2) dm - \omega_z \int yz dm \right] \\ &\quad + \hat{k} \left[-\omega_x \int xz dm - \omega_y \int yz dm + \omega_z \int (x^2 + y^2) dm \right] = H_G)_x \hat{i} + H_G)_y \hat{j} + H_G)_z \hat{k}\end{aligned}$$

فواصل نقطه P از محورهای x و y و z به ترتیب: $\sqrt{x^2 + y^2}$ و $\sqrt{x^2 + z^2}$ و $\sqrt{y^2 + z^2}$ می‌باشند. در این صورت لختی دورانی حول محورهای x و y و z به ترتیب به صورت: $I_{xx} = \int (y^2 + z^2) dm$ و $I_{yy} = \int (x^2 + z^2) dm$ و $I_{zz} = \int (x^2 + y^2) dm$ تعریف می‌شوند.

حاصل ضرب‌های لختی نیز به صورت: $I_{xy} = \int xy dm$ و $I_{xz} = \int xz dm$ و $I_{yz} = \int yz dm$ تعریف می‌شوند. بنابراین نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} H_G)_x = I_{xx} \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{xz} \omega_z \\ H_G)_y = -I_{xy} \omega_x - I_{yy} \omega_y - I_{yz} \omega_z \\ H_G)_z = -I_{xz} \omega_x - I_{yz} \omega_y + I_{zz} \omega_z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_G)_x \\ H_G)_y \\ H_G)_z \end{cases} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\{H_G\} = [I_G] \{\omega\}}$$

اگر محورهای اصلی بر محورهای مختصات منطبق باشند حاصل ضرب‌های لختی صفر خواهند شد در این صورت روابط زیر حاصل می‌گردند.

$$\begin{cases} H_G)_x = I_{xx} \omega_x \\ H_G)_y = I_{yy} \omega_y \\ H_G)_z = I_{zz} \omega_z \end{cases}$$

برای به‌دست آوردن رابطه گشتاور می‌بایستی از رابطه اندازه حرکت زاویه‌ای نسبت به زمان مشتق گرفت. اگر دستگاه مختصات Gxyz متصل به جسم صلب باشد با جسم صلب دوران خواهد نمود و بردارهای یکه دارای مشتق نسبت به زمان خواهند بود.

$$\begin{aligned}\vec{M}_G &= \dot{\vec{H}}_G = \dot{H}_G)_x \hat{i} + \dot{H}_G)_y \hat{j} + \dot{H}_G)_z \hat{k} + H_G)_x \dot{\hat{i}} + H_G)_y \dot{\hat{j}} + H_G)_z \dot{\hat{k}} \\ &= \dot{H}_G)_x \hat{i} + \dot{H}_G)_y \hat{j} + \dot{H}_G)_z \hat{k} + H_G)_x (\vec{\omega} \times \hat{i}) + H_G)_y (\vec{\omega} \times \hat{j}) + H_G)_z (\vec{\omega} \times \hat{k}) \\ \Rightarrow \vec{M}_G &= \dot{H}_G)_x \hat{i} + \dot{H}_G)_y \hat{j} + \dot{H}_G)_z \hat{k} + \vec{\omega} \times (H_G)_x \hat{i} + H_G)_y \hat{j} + H_G)_z \hat{k} \\ \Rightarrow \vec{M}_G &= \dot{H}_G)_x \hat{i} + \dot{H}_G)_y \hat{j} + \dot{H}_G)_z \hat{k} + \vec{\omega} \times \vec{H}_G = M_G)_x \hat{i} + M_G)_y \hat{j} + M_G)_z \hat{k}\end{aligned}$$

که در آن:

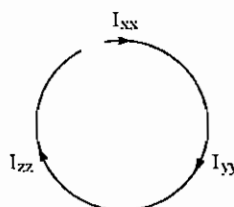
$$\begin{cases} \dot{H}_G)_x = I_{xx} \dot{\omega}_x - I_{xy} \dot{\omega}_y - I_{xz} \dot{\omega}_z \\ \dot{H}_G)_y = -I_{xy} \dot{\omega}_x + I_{yy} \dot{\omega}_y - I_{yz} \dot{\omega}_z \\ \dot{H}_G)_z = -I_{xz} \dot{\omega}_x - I_{yz} \dot{\omega}_y + I_{zz} \dot{\omega}_z \end{cases}$$

با جایگذاری روابط مولفه‌ها \vec{H}_G بر حسب مولفه‌های سرعت‌های زاویه‌ای ω_x و ω_y و ω_z در رابطه \vec{M}_G و استفاده از روابط بالا سه مولفه بردار گشتاور حول مرکز جرم G بر حسب مولفه‌های سرعت‌های زاویه‌ای ω_x و ω_y و ω_z و مولفه‌های شتاب‌های زاویه‌ای $\dot{\omega}_x$ و $\dot{\omega}_y$ و $\dot{\omega}_z$ به‌دست می‌آیند که این معادلات را معادلات اوایلر می‌نامند و با معلوم بودن گشتاور خارجی می‌توان سه معادله اوایلر را

حل نمود و $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ و $\dot{\omega}_x, \dot{\omega}_y, \dot{\omega}_z$ را محاسبه نمود. حل این معادلات در حالت کلی ساده نیست لذا این معادلات برای حالتی که محورهای اصلی بر محورهای مختصات منطبق باشد به صورت زیر ساده می شود.

معادلات اوپلر در حالت خاص:

$M_G)_x = I_{xx} \dot{\omega}_x + \omega_y \omega_z (I_{zz} - I_{yy})$
$M_G)_y = I_{yy} \dot{\omega}_y + \omega_x \omega_z (I_{xx} - I_{zz})$
$M_G)_z = I_{zz} \dot{\omega}_z + \omega_y \omega_x (I_{yy} - I_{xx})$



دایره ترسیم شده جهت حفظ کردن معادلات اوپلر در حالت خاص به کار می رود.

نکته: اگر نقطه O نقطه ای باشد که جسم حول آن نقطه لوله شده است اندازه حرکت زاویه ای حول آن نقطه از رابطه

$$\vec{H}_O = \int \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm$$

محاسبه می شود که در آن \vec{r} موقعیت المان dm نسبت به نقطه O می باشد.

نکته: المان dm از یک جسم صلب را که در نقطه A قرار دارد و بردار موقعیتش نسبت به مرکز جرم G بردار \vec{r} می باشد در نظر

بگیرید. در این صورت $\vec{v}_A = \vec{v}_G + \vec{\omega} \times \vec{r} \Rightarrow v_A^2 = \vec{v}_A \cdot \vec{v}_A = (\vec{v}_G + \vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot (\vec{v}_G + \vec{\omega} \times \vec{r}) = v_G^2 + 2\vec{v}_G \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) + (\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r})$

$$= v_G^2 + 2\vec{v}_G \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{\omega} \cdot [\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})] \Rightarrow \text{(انرژی جنبشی)} \quad T = \frac{1}{2} \int v_A^2 dm = \frac{mv_G^2}{2} + \vec{v}_G \cdot \vec{\omega} \times \int \vec{r} dm$$

$$+ \frac{1}{2} \int \vec{\omega} \cdot [\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})] = \frac{1}{2} mv_G^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{H}_G = \frac{1}{2} \vec{v}_G \cdot \vec{P}_G + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{H}_G$$

در عبارت بالا $\vec{P}_G = m\vec{v}_G$ بردار اندازه حرکت خطی مرکز جرم جسم صلب می باشد و چون مبدا مختصات در مرکز جرم واقع است

$$\int \vec{r} dm = \vec{0}$$

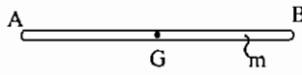
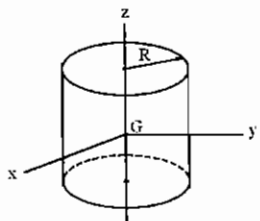
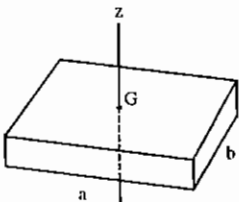
رابطه قبل به صورت زیر ساده می شود

$$T = \frac{1}{2} mv_G^2 + \frac{1}{2} (I_{xx} \omega_x^2 + I_{yy} \omega_y^2 + I_{zz} \omega_z^2) - (I_{xy} \omega_x \omega_y + I_{xz} \omega_x \omega_z + I_{yz} \omega_y \omega_z)$$

اگر جسم حول نقطه ثابت O لولا شده و یا نقطه ای روی جسم موجود باشد که در یک لحظه سرعتش صفر باشد آن گاه

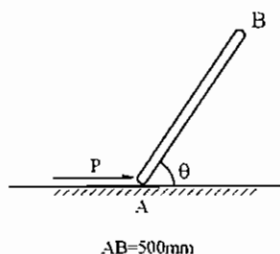
$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{H}_O$$

روابط لختی چند جسم صلب:

 <p style="text-align: center;">$AB = l$</p> <p>میله یکنواخت به طول l و جرم m</p>	$I_G = \frac{1}{12} m l^2$ $I_A = I_B = I_G + m G A^2 = \frac{1}{3} m l^2$
 <p>استوانه به جرم m و شعاع قاعده R</p>	$I_{zz} = \frac{1}{2} m R^2$ $I_{yy} = I_{xx} = \frac{I_{zz}}{2} = \frac{m R^2}{4}$
 <p>مکعب به طول a و b و جرم m</p>	$I_{zz} = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$

مثالهایی از دینامیک اجسام صلب:

تست سال (۷۵ - ۷۶)



به میله‌ای همگن به جرم 4 [kg] نیروی افقی $P = 60 \text{ [N]}$ وارد می‌شود. اگر این میله فقط دارای حرکت انتقالی باشد، زاویه تمایل θ آن نسبت به سطح افق چه مقدار می‌باشد؟

(سطح افقی را بدون اصطکاک فرض کنید)

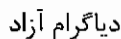
۴) 43.2°

۳) 33.2°

۲) 23.2°

۱) 13.2°

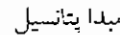
است.



$$\Rightarrow \tan \theta = \frac{N}{P} = \frac{mg}{P} = \frac{4 \times 9.81}{60} \Rightarrow \boxed{\theta \approx 33.2^\circ}$$

تست سال (۷۷ - ۷۸)

درآید کدام یک از پاسخ‌های زیر است؟ جرم هر کدام از میله‌ها برابر m است و حرکت در صفحه قائم رخ می‌دهد.



$$v = \sqrt{\frac{24}{13} g \ell} \quad (1)$$

قانون بقای انرژی مکانیکی برقرار است. موقعیت اول سیستم با شماره ① و موقعیت بعدی سیستم با شماره ② مشخص می‌شود.

$$\begin{cases} T_1 = 0 \\ (V_g)_1 = mg\ell + mg\ell/2 = 3mg\ell/2 \end{cases} \quad \begin{cases} T_2 = \frac{1}{2} I_O \omega_{OA'}^2 + \frac{1}{2} m (V_{G_2'})^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} m \ell^2 \right) (\omega_{OA'})^2 + \frac{1}{2} m (V_{B'})^2 \\ (V_g)_2 = mg\ell/2 + 0 = mg\ell/2 \end{cases}$$

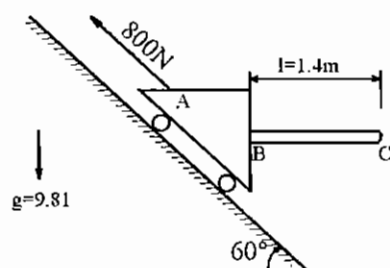
$$V_A' = V_B' = V_{G_2'} = \ell \omega_{OA'} \Rightarrow T_2 = \frac{1}{6} m \ell^2 \left(\frac{V_B'}{\ell} \right)^2 + \frac{1}{2} m (V_B')^2 = \frac{2m}{3} (V_B')^2$$

$$\Rightarrow E_1 = T_1 + V_g \Big|_1 = 3mg \ell/2 \quad , \quad E_2 = T_2 + V_g \Big|_2 = \frac{2m}{3} (V'_B)^2 + mg \ell/2$$

$$E_1 = E_2 \Rightarrow 3mg\ell/2 = \frac{2m}{3}(V'_B)^2 + mg\ell/2 \Rightarrow mg\ell = \frac{2m}{3}(V'_B)^2 \Rightarrow V'_B = \sqrt{\frac{3}{2}g\ell}$$

جواب گزینہ (۴) می باشد.

تست سال (۷۸ - ۷۹)



بلوک A و میله متصل به آن مجموعاً دارای جرم 60 kg هستند که در راستای مسیر نشان داده شده با نیروی 800 N کشیده می‌شوند. میله دارای جرم 20 kg است و از نقطه B به بلوک جوش شده است. گشتاور خمشی M در نقطه B (N.m) است؟ (از اثرات اصطکاک صرف نظر کنید).

254 (۴)

196 (۳)

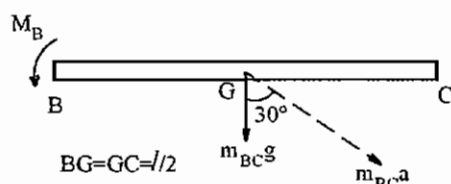
164 (۲)

137 (۱)

قانون دوم نیوتن در راستای موازی سطح شیب‌دار:

$$800 - (m_A + m_{BC})g \sin 60 = (m_A + m_{BC})a$$

$$800 - (40 + 20) \times 9.81 \sin 60 = (40 + 20)a \rightarrow a = 4.85 \left[\frac{m}{s} \right]$$



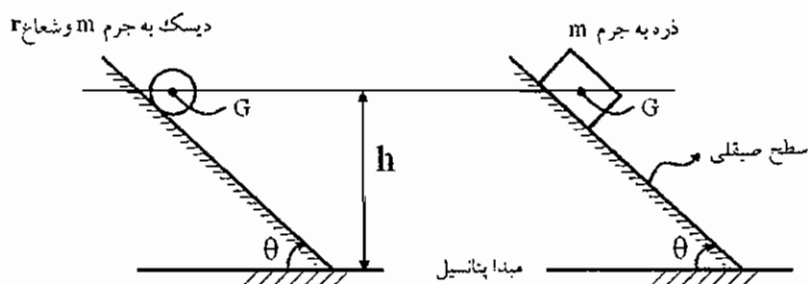
شتاب مجموعه تیر و بلوک A، می‌باشد، لذا شتاب تیر BC نیز a خواهد بود طبق اصل دالامبر نیروی اینرسی $m_{BC}a$ را در جهت عکس به سیستم اعمال می‌کنیم تا تعادل شبه استاتیکی ایجاد می‌شود. در این صورت جمع گشتاورهای حول نقطه B صفر خواهد بود.

$$-M_B + (m_{BC}g + m_{BC}a \cos 30) \frac{l}{2} = 0 \rightarrow M_B = (20 \times 9.81 + 20 \times 4.85 \times \cos 30) \frac{1.4}{2} = 196 [N.m]$$

لذا جواب گزینه (۳) خواهد بود.

تست سال (۷۸ - ۷۹)

اگر یک ذره و یک دیسک همگن هر دو با جرم m از یک ارتفاع یکسان بر روی سطح شیب‌دار با شیبی برابر، به طور هم‌زمان رها شوند و دیسک در طول مسیر غلتش کامل داشته باشد، کدام یک زودتر به پایین سطح شیب‌دار خواهند رسید؟



(۱) ذره با جرم m

(۲) دیسک با جرم m

(۳) هر دو با هم به طور هم‌زمان به پایین سطح شیب‌دار می‌رسند.

(۴) بستگی به ضریب اصطکاک بین دیسک و سطح شیب‌دار دارد.

الف) بقای انرژی برای ذره به جرم m

$$\begin{cases} T_1 = 0 \\ V_g)_1 = mgh \end{cases} \Rightarrow E_1 = T_1 + V_g)_1 = mgh$$

$$\begin{cases} T_2 = \frac{1}{2}mv_G^2 \\ V_g)_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow E_2 = T_2 + V_g)_2 = \frac{1}{2}mv_G^2$$

$$E_1 = E_2 \Rightarrow v_G)_{\text{mass}} = \sqrt{2gh}$$

ب) بقای انرژی برای دیسک به جرم m

$$\begin{cases} T_1 = 0 \\ V_g)_1 = mgh \end{cases} \Rightarrow E_1 = mgh$$

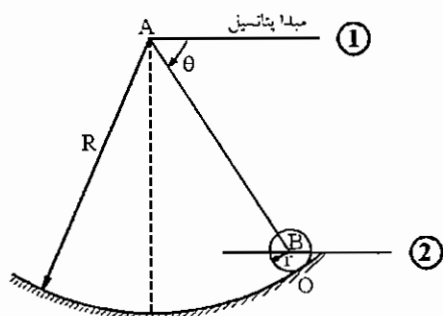
$$\begin{cases} T_2 = \frac{1}{2}I_G\omega^2 + \frac{1}{2}mv_G^2 \\ V_g)_2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{v_G = r\omega} \frac{1}{2}I_G\left(\frac{v_G}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}mv_G^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{mr^2}{2}\right)\left(\frac{v_G}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}mv_G^2 = \frac{3}{4}mv_G^2$$

$$\Rightarrow E_2 = \frac{3}{4}mv_G^2 \Rightarrow E_1 = E_2 \rightarrow v_G)_{\text{disk}} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

ذره سریعتر می‌رسد لذا جواب گزینه (۱) می‌باشد. $v_G)_{\text{mass}} > v_G)_{\text{disk}}$

تست سال (۷۶ - ۷۵)

دیسک B به جرم m بر روی سطح دایروی به شعاع R می‌غلتد اگر دیسک از حالت سکون در $\theta = 0$ رها گردد، سرعت زاویه‌ای شعاع AB در $\theta = 90^\circ$ کدام است؟



$$\omega = \sqrt{\frac{4gR}{3r^2}} \quad (۲) \quad \omega = \sqrt{\frac{4g}{2R-r}} \quad (۱)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{R-r}} \quad (۴) \quad \omega = \sqrt{\frac{4g}{3(R-r)}} \quad (۳)$$

قانون بقای انرژی مکانیکی برقرار است.

$$\begin{cases} T_1 = 0 \\ V_g)_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow E_1 = T_1 + V_g)_1 = 0$$

$$\begin{cases} T_2 = \frac{1}{2}I_O\omega_{\text{disk}}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2 + mr^2\right)\omega_{\text{disk}}^2 = \frac{3}{4}mr^2\omega_{\text{disk}}^2 \\ V_g)_2 = -mg(R-r)\sin\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow E_2 = T_2 + V_g)_2 = \frac{3}{4}mr^2\omega_{\text{disk}}^2 - mg(R-r)\sin\theta$$

$$E_1 = E_2 \Rightarrow \frac{3}{4}mr^2\omega_{\text{disk}}^2 = mg(R-r)\sin\theta \Rightarrow \omega_{\text{disk}} = \sqrt{\frac{4g(R-r)\sin\theta}{3r^2}}$$

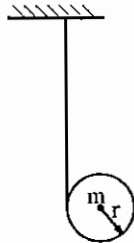
$$v_B = BO\omega_{\text{disk}} = r\omega_{\text{disk}} = BA\dot{\theta} = (R-r)\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{r}{R-r}\omega_{\text{disk}} = \sqrt{\frac{4g\sin\theta}{3(R-r)}}$$

$$\dot{\theta}|_{\theta=90^\circ} = \sqrt{\frac{4g}{3(R-r)}}$$

جواب گزینه (۳) می باشد.

تست سال (۶۹ - ۷۰)

استوانه‌ای به جرم m به شعاع r به وسیله طنابی که به دور آن پیچیده شده آویزان شده است. اگر استوانه رها شود، کشش در طناب برابر است با (ممان اینرسی استوانه حول مرکز جرم برابر $\frac{1}{2}mr^2$ است):



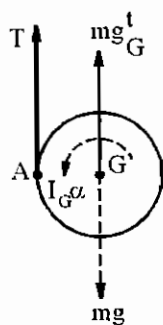
$$\frac{mg}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{mg}{3} \quad (۱)$$

$$\text{صفر} \quad (۴)$$

$$\frac{3mg}{5} \quad (۳)$$

دیسک حول نقطه A دوران می کند و نقطه A مرکز آنی دوران است.



$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T + ma_G - mg = 0$$

$$T + mr\alpha - mg = 0 \Rightarrow \frac{mr\alpha}{2} + mr\alpha - mg = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{2g}{3r}}$$

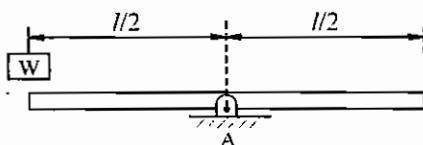
$$\Sigma M_G = 0 \Rightarrow -Tr + I_G\alpha = 0 \Rightarrow -Tr + \frac{mr^2}{2}\alpha = 0 \Rightarrow T = \frac{mr\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow T = \frac{mr}{2} \left(\frac{2g}{3r} \right) = \boxed{\frac{mg}{3}}$$

جواب گزینه (۱) می باشد.

تست سال (۷۷ - ۷۶)

میله‌ای به وزن W به طول L در حالت تعادل روی تکیه‌گاه A قرار گرفته است. شتاب زاویه‌ای میله در سمت لبه از لحظه‌ای که وزن $\frac{W}{g}$ را به آرامی در انتهای میله قرار می دهیم، برابر است با:



$$\frac{g}{6L} \quad (۲)$$

$$\frac{g}{2L} \quad (۱)$$

$$\frac{3}{2} \frac{g}{L} \quad (۴)$$

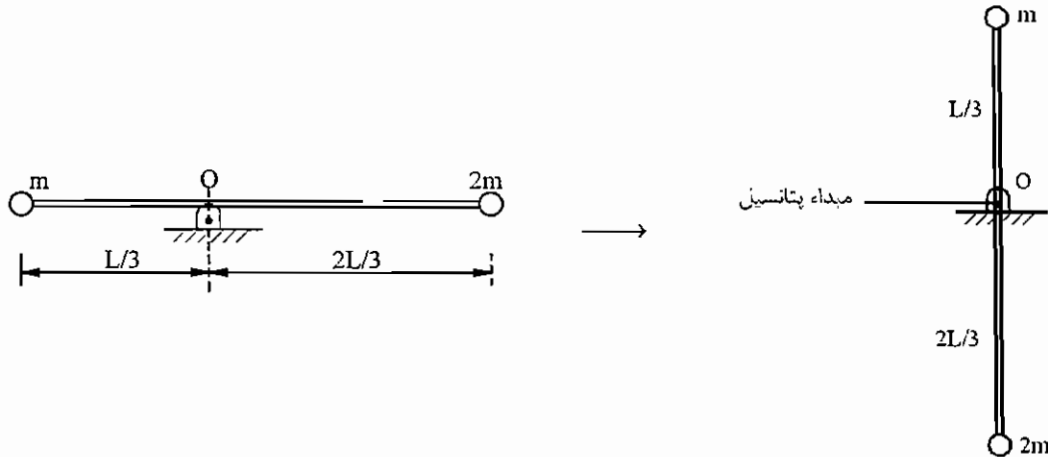
$$\frac{2}{3} \frac{g}{L} \quad (۳)$$

$$M_A = W \frac{\ell}{2} = I_A \alpha = \left(\frac{1}{12} \frac{W}{g} \ell^2 + \frac{W}{g} \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 \right) \alpha \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{3g}{2\ell}}$$

جواب گزینه (۴) می باشد.

تست سال (۷۶ - ۷۷)

به دو انتهای یک میله افقی بی‌وزن روی صفحه قائم جرم‌های m و $2m$ نصب شده است. این میله از حالت سکون افقی رها می‌گردد. وقتی به وضع قائم می‌رسد، کدامیک از نتایج زیرین صحیح است؟



(۲) سرعت زاویه‌ای میله برابر $\sqrt{\frac{2g}{L}}$ رادیان بر ثانیه است.

(۱) سرعت زاویه‌ای میله برابر $\sqrt{\frac{g}{2L}}$ رادیان بر ثانیه است.

(۴) شتاب زاویه‌ای برابر $\frac{g}{2L}$ است.

(۳) شتاب زاویه‌ای برابر $\frac{2g}{L}$ رادیان بر مجذور ثانیه است.

$$\text{گشتاور نیروی } 2mg \text{ حول نقطه } o = 2mg \left(\frac{2L}{3} \right) = 4 \frac{mgL}{3} > \frac{mgL}{3}$$

$$\text{گشتاور نیروی } mg \text{ حول نقطه } o = mg \frac{L}{3}$$

لذا جرم $2m$ پایین می‌آید و جرم m بالا می‌رود. قانون بقای انرژی مکانیکی برقرار است، لذا:

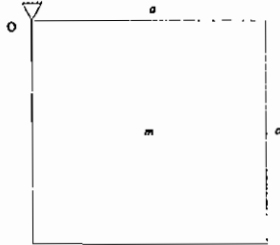
$$\begin{cases} T_1 = 0 \\ V_g)_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow E_1 = T_1 + V_g)_1 = 0$$

$$\begin{cases} T_2 = \frac{1}{2} I_o \omega^2 = \frac{1}{2} \left[m \left(\frac{L}{3} \right)^2 + 2m \left(\frac{2L}{3} \right)^2 \right] \omega^2 = \frac{mL^2}{2} \omega^2 \\ V_g)_2 = mg \frac{L}{3} - 2mg \left(\frac{2L}{3} \right) = -mgL \end{cases} \Rightarrow E_2 = T_2 + V_g)_2 = m \frac{L^2}{2} \omega^2 - mgL = E_1 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{2g}{L}}}$$

لذا جواب گزینه (۲) می‌باشد.

صفحه متجانس مربع شکل به ابعاد $a \times a$ در گوشه‌ای مفصل شده است و از حالت سکون رها می‌شود. سرعت زاویه‌ای آن بعد از 45° درجه چرخش برابر است با (کنکور سال ۸۶).



$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)\frac{g}{a}} \quad (۲) & \omega &= \sqrt{\frac{3}{2}(\sqrt{2}-1)\frac{g}{a}} \quad (۱) \\ \omega &= \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)\frac{g}{a}} \quad (۴) & \omega &= \sqrt{\frac{3}{2}(\sqrt{2}+1)\frac{g}{a}} \quad (۳) \end{aligned}$$

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$OG = \frac{\sqrt{2}a}{2}$$

$$I_O = I_G + mOG^2 = \frac{m(a^2 + a^2)}{12} + m\left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow I_O = \frac{ma^2}{6} + \frac{ma^2}{2} = \frac{4ma^2}{6} = \frac{2ma^2}{3}$$

$$\begin{cases} T_1 = 0 \\ V_{g1} = -mg\frac{a}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} T_2 = \frac{1}{2}I_O\omega^2 \\ V_{g2} = -mg\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right) \end{cases}$$

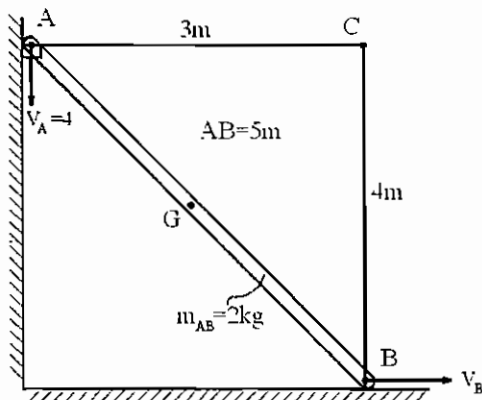
$$\Delta E = 0 \Rightarrow E_1 = E_2 \Rightarrow 0 - mg\frac{a}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2ma^2}{3}\right)\omega^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}mga \Rightarrow$$

$$\frac{ma^2}{3}\omega^2 = \frac{(\sqrt{2}-1)}{2}mga \Rightarrow \frac{a}{3}\omega^2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}g \Rightarrow \boxed{\omega^2 = \frac{3}{2}(\sqrt{2}-1)\frac{g}{a}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3}{2}(\sqrt{2}-1)\frac{g}{a}}$$

تست سال (۷۴ - ۷۵)

در لحظه نشان داده در شکل نقطه A از میله باریک AB به جرم 2 kg دارای سرعت $4\left[\frac{m}{s}\right]$ به سمت پایین می‌باشد. انرژی جنبشی میله

کدام است؟



(۱) 3.71 N.m

(۲) 13.5 N.m

(۳) 14.81 N.m

(۴) 16.3 N.m

مرکز آنی دوران میله AB نقطه (C) محل تلاقی عمود بر سرعت‌های نقاط A و B می‌باشد.

$$v_A = 4 \left[\frac{m}{s} \right] = AC\omega_{AB} = 3\omega_{AB} \Rightarrow \omega_{AB} = \frac{4}{3} \left[\frac{rad}{s} \right]$$

$$v_B = BC\omega_{AB} = 4\omega_{AB} = 4 \left(\frac{4}{3} \right) = \frac{16}{3} \left[\frac{m}{s} \right]$$

$$v_G = GC\omega_{AB} = \frac{5}{2} \left(\frac{4}{3} \right) = \frac{10}{3} \left[\frac{m}{s} \right]$$

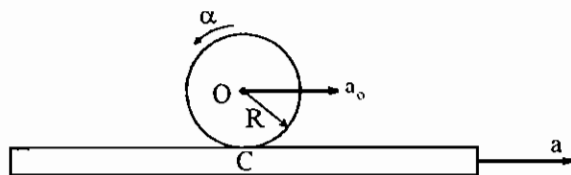
$$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega_{AB}^2 = \frac{1}{2} \times 2 \times \left(\frac{10}{3} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} \times 2 \times 5^2 \right) \left(\frac{4}{3} \right)^2 = \frac{400}{27} \approx 14.8 [N.m]$$

لذا جواب گزینه (۳) می‌باشد.

تست سال (۷۸ - ۷۷)

تسمه‌ای با سرعت v و شتاب ثابت a به سمت راست حرکت می‌کند. بر روی این تسمه دیسکی نسبت به تسمه به سمت چپ می‌غلتد در حالی که شتاب کل مرکز دیسک به سمت راست است. نیروی اصطکاک بین تسمه و دیسک برابر است با: (جرم دیسک برابر m و

ضریب اصطکاک بین تسمه و دیسک برابر μ و $I_{\text{disk}} = \frac{1}{2}mR^2$ است)



$$\frac{1}{3}ma \quad (۲)$$

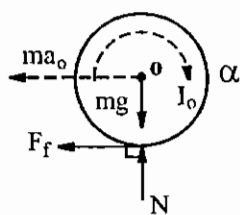
$$\mu mg \quad (۱)$$

$$\frac{1}{2}\mu mg \quad (۴)$$

$$\frac{1}{2}ma \quad (۳)$$

در مورد اصطکاک لغزشی همواره جهت آن، عکس حرکت می‌باشد. اما در اصطکاک غلتشی اگر هیچ گشتاور محرکی روی دیسک غلتان نباشد نیروی اصطکاک غلتشی در جهت عکس حرکت و اگر گشتاور محرکی روی دیسک غلتان باشد نیروی اصطکاک در جهت حرکت و یا در جهتی خواهد بود که با گشتاور محرک مقابله نماید.

$$a_o = a_C + a_{o/C} = a - R\alpha$$



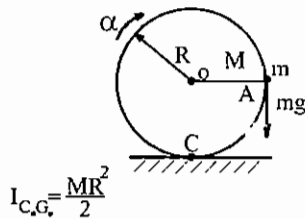
$$\begin{cases} -ma_o - F_f = 0 \Rightarrow ma_o = -F_f = \frac{mR\alpha}{2} \\ \Rightarrow a_o = a - R\alpha = \frac{R\alpha}{2} \Rightarrow a = \frac{3R\alpha}{2} \\ I_o\alpha + F_fR = 0 \Rightarrow \frac{mR^2}{2}\alpha + F_fR = 0 \\ \Rightarrow F_f = -\frac{mR}{2}\alpha = -\frac{mR}{2} \left(\frac{2a}{3R} \right) = -\frac{ma}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow F_f \text{ اندازه نیروی } = \frac{ma}{3}$$

لذا جواب گزینه (۲) می‌باشد.

تست سال (۷۹ - ۷۸)

در پیرامون دیسک یکنواخت به جرم M و شعاع R ذره‌ای با جرم m در وضع نشان داده شده نصب گردیده است. شتاب زاویه‌ای دیسک در لحظه آزاد شدن از وضع نشان داده شده برابر است با:



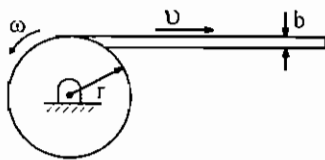
$$\begin{array}{ll} (۱) & \frac{mg}{(3M + 2m)R} \\ (۲) & \frac{2mg}{(M + m)R} \\ (۳) & \frac{2mg}{(3M + 4m)R} \\ (۴) & \frac{4mg}{(M + 4m)R} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \sum M_C = I_C \alpha = mgR &= \left(\frac{MR^2}{2} + MR^2 + mAC^2 \right) \alpha = \left(\frac{3MR^2}{2} + m(\sqrt{2}R)^2 \right) \alpha \\ \Rightarrow \alpha &= \frac{2mg}{(3M + 4m)R} \end{aligned}$$

لذا جواب گزینه (۳) می‌باشد.

تست سال (۷۶ - ۷۵)

هنگام کار چاپ، کاغذ با سرعت ثابت v زیر دستگاه چاپ کشیده می‌شود هرگاه شعاع رول در هر لحظه با r نشان داده شود و ضخامت کاغذ b باشد، شتاب زاویه‌ای رول کاغذ کدام است؟



$$\begin{array}{ll} (۱) & \frac{1}{2} \frac{bv^2}{\pi r^3} \\ (۲) & \frac{2}{3} \frac{bv^2}{\pi r^3} \\ (۳) & \frac{3}{2} \frac{bv^2}{\pi r^3} \\ (۴) & 2 \frac{bv^2}{\pi r^3} \end{array}$$

$$v = r\omega = \text{constant} \Rightarrow \omega = \frac{v}{r} \Rightarrow \alpha = \dot{\omega} = \frac{-v\dot{r}}{r^2}$$

$$\dot{r} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

از آنجایی که در مدت $\frac{2\pi}{\omega}$ رول یک دور می‌چرخد و در اثر این چرخش شعاع رول به اندازه ضخامت کاغذ یعنی b کم می‌شود بنابراین

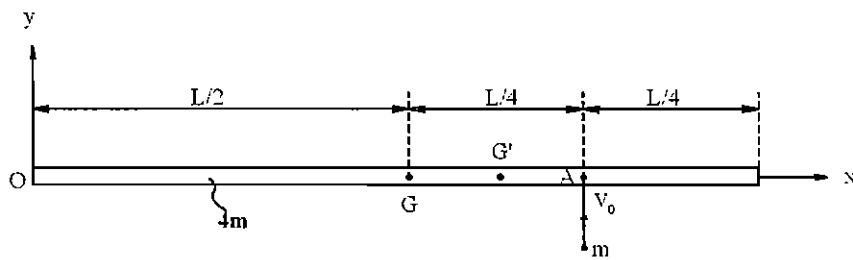
$$\Delta r = -b \text{ و } \Delta t = \frac{2\pi}{\omega} \text{ خواهد بود و لذا نتیجه می‌شود.}$$

$$\dot{r} = \frac{-b}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{-b\omega}{2\pi} \Rightarrow \alpha = \frac{-v}{r^2} \left(\frac{-b\omega}{2\pi} \right) = \frac{bv}{2\pi r^2} \left(\frac{v}{r} \right) = \frac{bv^2}{2\pi r^3}$$

جواب گزینه (۱) می‌باشد.

تست سال (۷۸ - ۷۹)

اگر یک ذره به جرم m با میله به جرم $4m$ در موقعیت $\frac{1}{4}$ برخورد پلاستیک کامل کند، سرعت مرکز جرم میله را درست پس از برخورد پیدا کنید. (برخورد در سطح افق بدون اصطکاک رخ می‌دهد).



$$v_G = 0 \quad (۱)$$

$$v_G = \frac{3}{11} v_0 \quad (۲)$$

$$v_G = \frac{4}{11} v_0 \quad (۳)$$

$$v_G = \frac{4}{23} v_0 \quad (۴)$$

چون برخورد پلاستیک کامل است بنابراین پس از برخورد جرم m به جرم $4m$ می‌چسبد و مرکز جرم G به نقطه G' تغییر موقعیت می‌دهد. در دستگاه مختصات oxy مختصات مرکز جرم G $(0, \frac{L}{2})$ و مختصات جرم m پس از چسبیدن به میله $(0, \frac{3L}{4})$ خواهد بود، بنابراین:

$$x_{G'} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{(4m) \left(\frac{L}{2} \right) + m \left(\frac{3L}{4} \right)}{4m + m} = \frac{11mL}{5m} = \frac{11L}{20}$$

$$y_{G'} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = \frac{4m \times 0 + m \times 0}{4m + m} = 0$$

بنابراین مرکز جرم جدید یعنی نقطه G' در فاصله $\frac{11L}{20}$ از نقطه O یا $\frac{L}{20}$ GG' خواهد بود.

$$4m \times 0 + m v_0 = (4m + m) v_{G'} \Rightarrow v_{G'} = \frac{v_0}{5}$$

قانون بقای اندازه حرکت خطی در راستای ضربه:

در صورت مساله سرعت v_G خواسته شده است، بنابراین:

$$v_{G'} = v_G + v_{G'/G} \Rightarrow \frac{v_0}{5} = v_G + GG' \omega_{\text{bar}} \Rightarrow v_G = \frac{v_0}{5} - \frac{L}{20} \omega_{\text{bar}}$$

حال باید سرعت زاویه‌ای میله یعنی ω_{bar} محاسبه شود.

نیروی ضربه‌ای وارده از جرم m در نقطه A به میله وارد می‌شود لذا گشتاور این نیرو حول نقطه A صفر است. بنابراین قانون بقای اندازه حرکت زاویه‌ای حول نقطه A برقرار است.

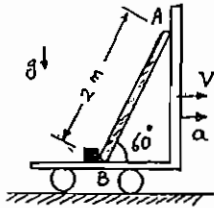
$$H_A)_1 = H_A)_2 \Rightarrow 0 = I_G \omega_{\text{bar}} - (4m) v_G \left(\frac{L}{4} \right) = \frac{1}{12} (4m) L^2 \omega_{\text{bar}} - mL v_G \Rightarrow \omega_{\text{bar}} = \frac{3v_G}{L}$$

$$\Rightarrow v_G = \frac{v_0}{5} - \frac{L}{20} \left(\frac{3v_G}{L} \right) \Rightarrow \frac{23v_G}{20} = \frac{v_0}{5} \Rightarrow \boxed{v_G = \frac{4}{23} v_0} \Rightarrow \omega_{\text{bar}} = \frac{3}{L} \left(\frac{4}{23} v_0 \right) = \boxed{\frac{12}{23} \frac{v_0}{L}}$$

لذا جواب گزینه (۴) می‌باشد.

تست‌های سال (۸۳ - ۸۲)

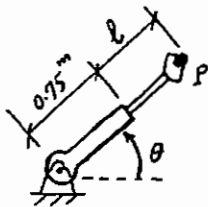
۱- میله AB به طول ۲ متر بر روی یک چهارچرخه که بر روی سطحی افقی در حرکت است قرار داده شده است. در صورتی که میله با افق زاویه ۶۰ درجه داشته و ضریب اصطکاک سکون در نقطه B برابر با $\mu_s = 0.5$ و در نقطه A برابر با $\mu_s = 0.0$ باشد، حداکثر شتاب منفی چهارچرخه را برای این که میله بر روی چهارچرخه نلغزد تعیین نمایید. (میله AB همگن بوده و مرکز جرم آن در وسط میله قرار دارد.)



$$(۱) \quad -2g \left[\frac{m}{s^2} \right] \quad (۲) \quad -1.866g \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

$$(۳) \quad -2.5g \left[\frac{m}{s^2} \right] \quad (۴) \quad -1.577g \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

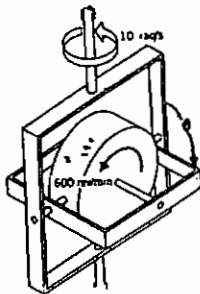
۲- در مکانیزم رباتیکی شکل مقابل طول بازوی دوران کننده ۰.۷۵ متر است. در موقعیت نشان داده شده چنانچه سرعت دوران بازوی دوار ۱۰ درجه بر ثانیه باشد و بازوی لغزنده در موقعیتی که طول ℓ برابر ۰.۵ متر باشد، دارای سرعت خطی ۰.۲ متر بر ثانیه و شتاب خطی ۰.۳- متر بر مجذور ثانیه باشد اندازه شتاب گیره P کدام گزینه است؟



$$(۱) \quad 0.338 \left[\frac{m}{s^2} \right] \quad (۲) \quad 0.345 \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

$$(۳) \quad 0.396 \left[\frac{m}{s^2} \right] \quad (۴) \quad 0.405 \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

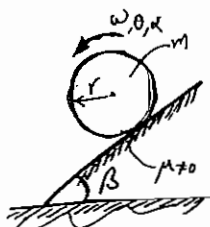
۳- دیسک مربوط به ژیرسکوپ نشان داده در شکل در این لحظه دارای سرعت زاویه ثابت $600 \left[\frac{\text{rev}}{\text{min}} \right]$ در جهت نشان داده شده قاب بیرونی دارای سرعت زاویه‌ای ثابت $10 \left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right]$ در جهت نشان داده شده می‌باشد. چنانچه قاب داخلی در این لحظه در موقعیت $\theta = 60^\circ$ بوده و با سرعت و شتاب زاویه‌ای ثابت $\dot{\theta} = -5 \left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right]$ و $\ddot{\theta} = 10 \left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right]$ حرکت نماید. اندازه شتاب زاویه‌ای مطلق دیسک چقدر است؟



$$(۱) \quad 289.10 \left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}^2} \right] \quad (۲) \quad 433.17 \left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}^2} \right]$$

$$(۳) \quad 626.48 \left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}^2} \right] \quad (۴) \quad 554.10 \left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}^2} \right]$$

۴- استوانه‌ای به جرم m و شعاع r روی یک سطح شیب‌دار با زاویه β نسبت به افق در حال حرکت است. مطلوبست: ۱- تعیین حداقل ضریب اصطکاک μ برای ایجاد حرکت غلتش خالص استوانه و ۲- در صورتی که نیروی اصطکاک از f_{\max} بیشتر باشد، شتاب زاویه‌ای حرکت استوانه چقدر است؟

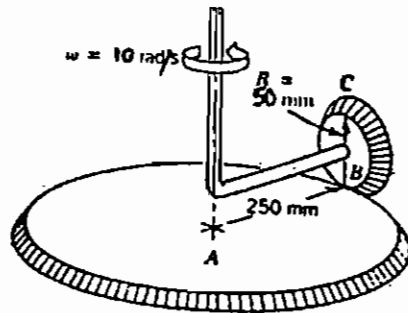


$$(۱) \quad \alpha = \frac{2g\mu \cos \beta}{r}, \mu \geq \frac{\tan \beta}{3} \quad (۲) \quad \alpha = \frac{g}{r} \sin \beta, \mu \geq \frac{1}{3} \cos \beta$$

$$(۳) \quad \alpha = \frac{2g}{r} \sin \beta, \mu \geq \frac{2}{3} \sin \alpha \quad (۴) \quad \alpha = \frac{2\mu g}{3r} \cos \beta, \mu \geq \frac{\tan \beta}{3}$$

۵- چرخ دنده B آزادانه به دور محورش با سرعت زاویه‌ای ثابت $10 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$ در جهت نشان داده شده در شکل می‌چرخد. چرخ دنده

A ثابت است، اندازه سرعت نقطه C چقدر است؟



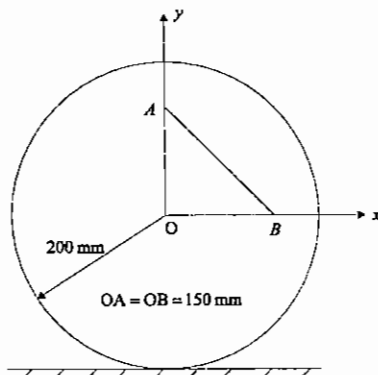
(۱) $0.5 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$

(۲) $2.5 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$

(۳) $5.0 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$

(۴) $3.0 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$

۶- دیسک مدور بدون لغزش به طرف چپ می‌غلتد. اگر $\vec{a}_{A/B} = -2.7 \hat{j} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$ باشد شتاب مرکز O دیسک را به دست آورید.

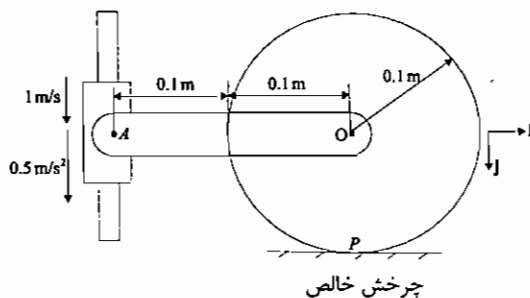


(۱) $\vec{a}_O = -1.8 \hat{i} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$ (۲) $\vec{a}_O = 0.824 \hat{i} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$

(۳) $\vec{a}_O = 1.8 \hat{i} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$ (۴) $\vec{a}_O = -0.824 \hat{i} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$

۷- برای موقعیت نشان داده شده لغزنده A، سرعتی برابر $1 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$ و شتابی برابر $0.5 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$ هر دو به طرف پایین دارد. شتاب زاویه

چرخ را در این لحظه به دست آورید.



(۱) $0 \left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}^2} \right]$ (۲) $5 \left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}^2} \right]$

(۳) $25 \left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}^2} \right]$ (۴) $50 \left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}^2} \right]$

۸- دیسکی را که دارای سرعت زاویه‌ای ω است بر روی زمین قرار می‌دهیم. ضریب اصطکاک سطح زمین و دیسک μ به اندازه‌ای

است که باعث می‌شود دیسک بر روی زمین بغلتد. سرعت زاویه‌ای دیسک با گذشت زمان:

(۲) تغییر نمی‌کند و ثابت می‌ماند.

(۱) اصطکاک باعث افزایش آن می‌شود.

(۴) در مورد تغییرات آن نمی‌توان قضاوت کرد.

(۳) به دلیل وجود اصطکاک کاهش می‌یابد.

پاسخ تشریحی

۱- گزینه ۴ صحیح می باشد.

میله به همراه چهارچرخه با شتاب منفی a حرکت می کند و حرکت انتقالی است. حداکثر شتاب زمانی به دست می آید که میله در آستانه لغزش قرار گیرد.

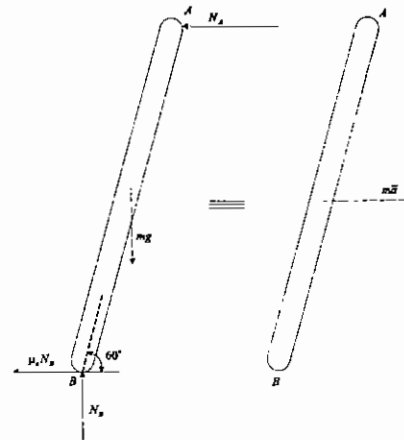
$$\begin{cases} N_B = mg \\ -(\mu_S N_B + N_A) = ma \end{cases}$$

$$\Sigma M_A = ma \frac{\ell}{2} \sin 60 \rightarrow -\mu_S N_B \ell \sin 60 - N_B \ell \cos 60 + mg \frac{\ell}{2} \cos 60 = ma \frac{\ell}{2} \sin 60$$

$$\Rightarrow -\mu_S mg \ell \frac{\sqrt{3}}{2} - mg \frac{\ell}{2} + mg \frac{\ell}{2} \times \frac{1}{2} = ma \frac{\ell}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow -g \left(\mu_S \sqrt{3} + \frac{1}{2} \right) = a \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow a = -g \left(2\mu_S + \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

$$= -g \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \right) = -1.577g \left[\frac{m}{s^2} \right]$$



۲- گزینه ۲ صحیح می باشد.

رابطه شتاب در مختصات قطبی عبارت است از:

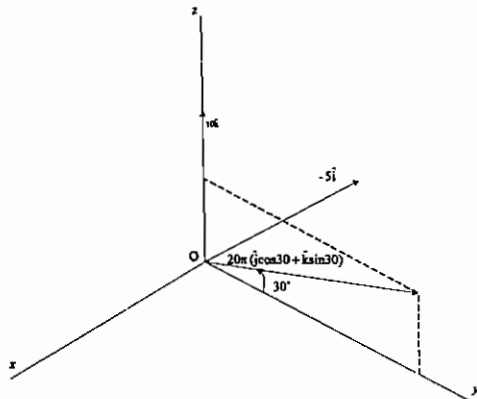
$$\vec{a}_p = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{10 \times \pi \text{ rad}}{180 \text{ s}} \\ r &= 0.75 + 0.5 = 1.25 \\ \dot{r} &= 0.2 \left[\frac{m}{s} \right] \\ \ddot{r} &= -0.3 \left[\frac{m}{s^2} \right] \end{aligned} \right\} \rightarrow \vec{a}_p = \left(-0.3 - 1.25 \times \left(\frac{\pi}{18} \right)^2 \right) \hat{e}_r + \left(1.25 \times 0 + 2 \times 0.2 \times \frac{\pi}{18} \right) \hat{e}_\theta = -0.3381 \hat{e}_r + 0.0698 \hat{e}_\theta$$

$$|a_p| = 0.3452 \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

با فرض $\ddot{\theta} = 0$ (در سوال نیامده است)

۳- گزینه (۴) صحیح می باشد.



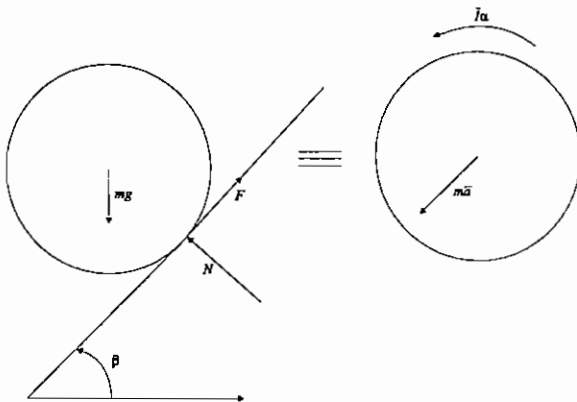
$$600 \left[\frac{\text{rev}}{\text{min}} \right] = \frac{2\pi \times 600}{60} = 20\pi \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

$$\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}} = \dot{\vec{\theta}}(-\hat{i}) + 10\hat{k} \times [(-5\hat{i}) + 10\pi(\sqrt{3}\hat{j} + \hat{k})]$$

$$\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}} = -10\hat{i} - 50\hat{j} + 100\sqrt{3}\pi(-\hat{i}) = -(10 + 100\sqrt{3}\pi)\hat{i} - 50\hat{j}$$

$$\alpha = \sqrt{(10 + 100\sqrt{3}\pi)^2 + (50)^2} \approx 554.1 \left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}^2} \right]$$

۴ - گزینه ۱ صحیح می باشد.



$$\begin{cases} -F + mg \sin \beta = m\bar{a} \\ N = mg \cos \beta \\ rF = I\alpha = \frac{mr^2}{2}\alpha \rightarrow F = \frac{mr\alpha}{2} \end{cases}$$

با فرض حرکت غلتش خالص داریم: $\bar{a} = r\alpha$

$$-\frac{m\bar{a}}{2} + mg \sin \beta = m\bar{a} \rightarrow \frac{3m\bar{a}}{2} = mg \sin \beta \rightarrow \bar{a} = \frac{2g \sin \beta}{3}$$

$$F = \frac{m\bar{a}}{2} = \frac{mg \sin \beta}{3} \leq \mu_s N = \mu_s mg \cos \beta \rightarrow \mu_s \geq \frac{\tan \beta}{3}$$

اگر $F \geq F_{\max}$ باشد اصطکاک لغزشی و حرکت لغزش و غلتش همزمان خواهد بود.

$$F = \mu_k mg \cos \beta$$

$$\mu_k mg \cos \beta = \frac{mr\alpha}{2} \rightarrow \alpha = \frac{2\mu_k g \cos \beta}{r}$$

۵ - گزینه (۳) صحیح می باشد.

$$v = r\omega$$

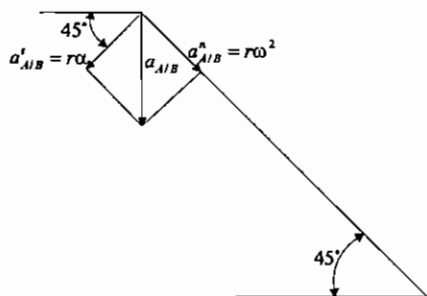
$$v_B = 0.25 \times 10 = 2.5 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

$$v_C = 2r\omega = 2v_B = 5 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

۶ - گزینه (۱) صحیح می باشد.

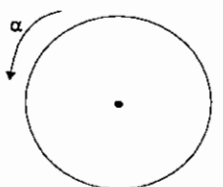
با ترسیم شتاب عمودی و مماسی بین نقاط A و B مشاهده می شود که $(a_{A/B})_t = r\alpha$ ، $(a_{A/B})_n = r\omega^2$ که α, ω به ترتیب

سرعت و شتاب زاویه ای چرخ و $r = 0.15\sqrt{2}$ فاصله بین نقاط A و B است که برآیند این دو بردار باید $2.7\hat{j}$ شود، پس:



$$\begin{cases} r\alpha = r\omega^2 \\ \sqrt{(r\alpha)^2 + (r\omega^2)^2} = 2.7 \end{cases} \rightarrow r\alpha = r\omega^2 = \frac{2.7}{\sqrt{2}}$$

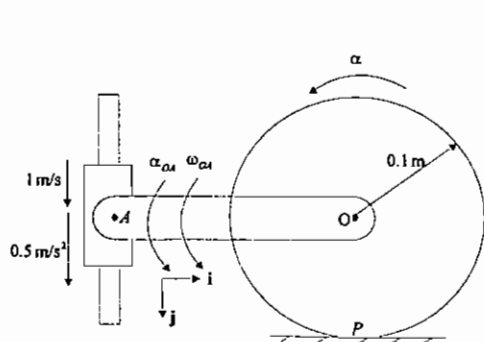
$$\alpha = \frac{2.7}{\sqrt{2} \times 0.15 \sqrt{2}} = \frac{2.7}{0.3} = 9 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \right]$$



$$\bar{a}_O = R\alpha \hat{i} = 0.2 \times 9 \hat{i} = 1.8 \hat{i} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

۷ - گزینه (۴) صحیح می باشد.

سرعت نقطه O چرخ در جهت \hat{i} خواهد بود و سرعت نقطه A به سمت پایین در جهت \hat{j} است پس مرکز آنی دوران میله OA نقطه O خواهد بود و:



$$\omega_{OA} = \frac{1}{0.2} = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \leftarrow v_A = r_{OA} \omega_{OA}$$

$$\bar{a}_{A/O} = 0.5 \hat{j}$$

$$\bar{a}_{A/O} = 0.2 \times 5^2 \hat{i} + 0.2 \alpha_{OA} \hat{j} = 5 \hat{i} + 0.2 \alpha_{OA} \hat{j}$$

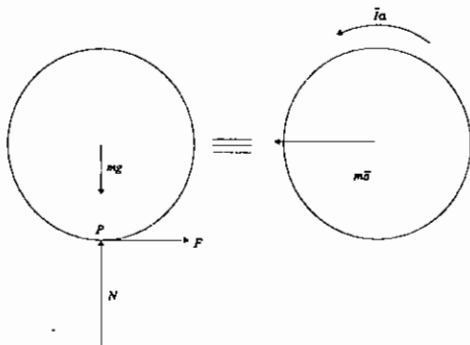
$$\bar{a}_O = -a_O \hat{i} = -0.1 \alpha \hat{i}$$

$$\bar{a}_A = \bar{a}_O + \bar{a}_{A/O}$$

$$0.5 \hat{j} = 5 \hat{i} + 0.2 \alpha_{OA} \hat{j} - 0.1 \alpha \hat{i} \rightarrow 5 - 0.1 \alpha = 0 \rightarrow \alpha = 50 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \right]$$

۸ - گزینه (۲) صحیح می باشد.

لذا زاویه شتاب زاویه ای دیسک صفر است.



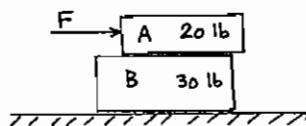
$$\sum M_P = I_O \alpha \rightarrow 0 = I_O \alpha \rightarrow \alpha = 0$$

تست‌های سال (۸۳ - ۸۴)

۱- بلوک B بر روی یک سطح صاف (بدون اصطکاک) قرار دارد. ضریب اصطکاک استاتیکی و دینامیکی بین بلوک A و B برابر با

$\mu_s = 0.4$ و $\mu_k = 0.3$ می‌باشد. چنانچه یک نیروی افقی برابر با $F = 5016$ به بلوک A وارد شود، شتاب بلوک B بر حسب $\frac{ft}{s^2}$

کدام است؟



5.48 (۲)

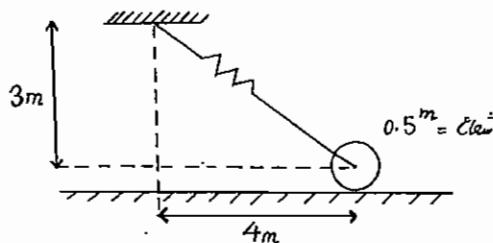
2.57 (۱)

6.44 (۴)

6.11 (۳)

۲- یک استوانه صلب همگن از وضعیت نشان داده شده از حال سکون رها می‌شود. جرم استوانه 12 kg می‌باشد. سختی فنر $2 \left[\frac{N}{m} \right]$

لبه و طول آزاد آن 1 m می‌باشد. سرعت زاویه‌ای استوانه بعد از این که 1 m جابه‌جا شود چقدر است؟ (بر حسب $\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$)



0.5 (۱)

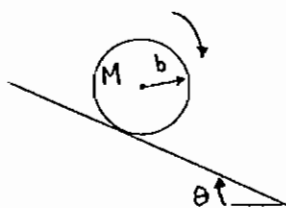
1 (۲)

1.5 (۳)

2 (۴)

۳- استوانه‌ای به شعاع b و جرم M از سطح شیب‌داری به شیب θ به طرف پایین می‌غلتد. در صورتی که حرکت بدون لغزش و به

صورت غلتش صرف باشد، درباره نوع نیروی اصطکاک اندازه و جهت آن کدام عبارت صحیح است؟



$$f = \frac{Mg \sin \theta}{3}$$

(۱) لغزشی

$$f = \frac{Mg \sin \theta}{3}$$

(۲) غلتشی:

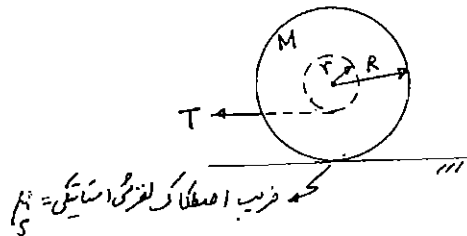
$$f = \mu_r Mg \sin \theta$$

(۳) غلتشی:

$$f = \mu_r Mg \sin \theta$$

(۴) لغزشی:

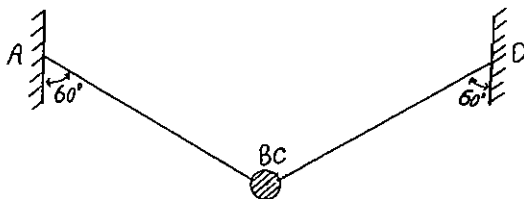
۴- قرقره‌ای با شعاع R و جرم M در دست است. ریسمانی که دور قرقره پیچیده شده است مانند شکل از شعاع محور r کشیده می‌شود. برای آن که قرقره هیچ‌گاه بر روی زمین نلغزد و فقط غلتش داشته باشد، ماکزیمم شتاب خطی مرکز قرقره چقدر خواهد بود؟



$$a_{\max} = 2 \left(\frac{R-r}{2r+R} \right) \mu g \quad (2) \quad a_{\max} = \frac{R}{R+r} \mu g \quad (1)$$

$$a_{\max} = 2 \left(\frac{2r+R}{R-r} \right) \mu g \quad (4) \quad a_{\max} = 2 \left(1 - \frac{r}{R} \right) \mu g \quad (3)$$

۵- کره کوچکی به جرم m مطابق شکل با دو سیم AB و CD نگه داشته شده است. سیم AB را آن‌گاه می‌بریم کشش در سیم CD و شتاب کره درست بعد از بریده شدن سیم AB به ترتیب از راست به چپ عبارت خواهد بود از:

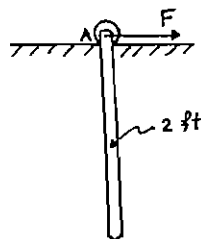


$$0.5g, \frac{W}{2} \quad (2) \quad 0.5g, \frac{W}{3} \quad (1)$$

$$0.866g, \frac{W}{2} \quad (4) \quad 0.866g, \frac{W}{3} \quad (3)$$

۶- میله‌ای به طول 2 ft و وزن 10 lb در حالت ایست می‌باشد. در این لحظه نیروی افقی $F = 15 \text{ lb}$ به نقطه A وارد می‌شود.

شتاب نقطه A در همین لحظه بر حسب $\frac{ft}{s^2}$ کدام است؟

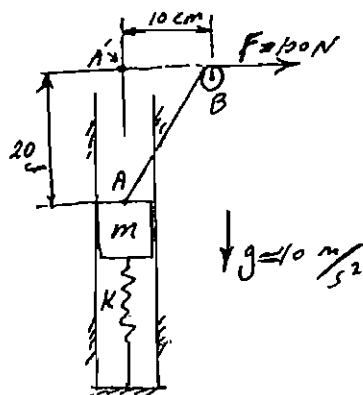


$$117 \quad (2) \quad 105 \quad (1)$$

$$231 \quad (4) \quad 193 \quad (3)$$

۷- وزنه یک کیلوگرمی بر روی فنر $K = 100 \frac{N}{m}$ در حالت سکون قرار دارد. اگر نیروی ثابت افقی $F = 100 \text{ N}$ از طریق ریسمان و

قرقره B بر وزنه اعمال گردد، سرعت آن در نقطه A' کدام است؟



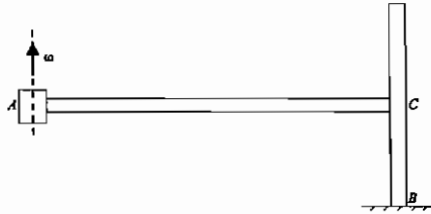
(۱) صفر

$$4.10 \frac{m}{s} \quad (2)$$

$$4.55 \frac{m}{s} \quad (3)$$

(۴) نیروی F برای رساندن وزنه به نقطه A' کافی نیست.

۸- چرخ C بدو ن لغزش می‌گلتد در حالی که محور آن مطابق شکل با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد. محور دوران چرخ منطبق بر است.



- (۱) محور ω
- (۲) خط AB
- (۳) خط AC
- (۴) محور دورانی وجود ندارد.

پاسخ تشریحی

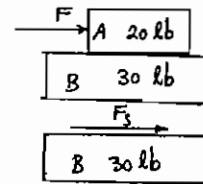
۱ - گزینه (۴) صحیح می باشد.

فرض اول: هر دو بلوک با هم حرکت می کنند.

$$F = 5016 \text{ lb}$$

$$\frac{F}{m} = \frac{5016}{50} = 3230.304 \left[\frac{\text{ft}}{\text{s}^2} \right] \rightarrow$$

$$F_S = \frac{30}{32.2} a = 3009.6 \text{ lb} \leq \mu_s W = 0.4 \times 20 = 8$$



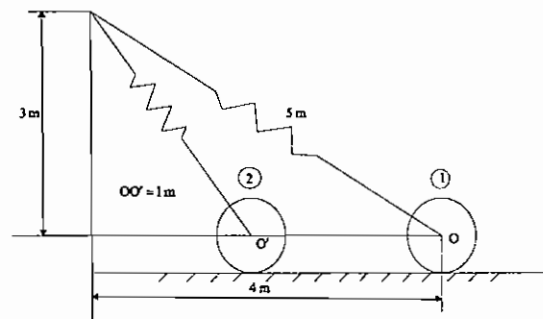
لذا فرض اول اشتباه است. فرض دوم بلوک A روی بلوک B می لغزد و A و B نسبت به هم حرکت نسبی دارند.

$$a_B = \frac{20 \times 0.3}{30} = 6.44 \left[\frac{\text{ft}}{\text{s}^2} \right]$$

۲ - گزینه (۳) صحیح می باشد.

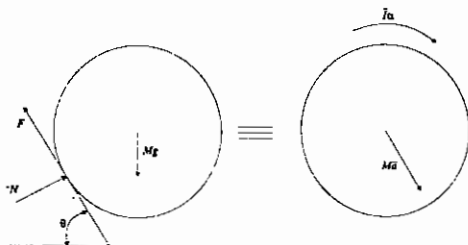
قانون بقای انرژی مکانیکی برقرار است. در شکل C نقطه تماس دیسک با زمین می باشد.

$$\begin{cases} T_1 = 0 \\ V_{e1} = \frac{1}{2} 2 \times (5-1)^2 = 16 \\ T_2 = \frac{1}{2} I_C \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{mr^2}{2} + mr^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{3mr^2}{2} \right) \omega^2 \\ = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times 12 (0.5)^2 \omega^2 = 2.25 \omega^2 \\ V_{e2} = \frac{1}{2} 2 (3\sqrt{2} - 1)^2 = 10.515 \end{cases}$$



$$E_1 = E_2 \rightarrow T_1 + V_{e1} = T_2 + V_{e2} \rightarrow 0 + 16 = 2.25 \omega^2 + 10.515 \rightarrow \omega^2 = 2.4379 \rightarrow \omega = 1.5 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

۳ - گزینه (۲) صحیح می باشد.



$$N = Mg \cos \theta$$

$$Mg \sin \theta - F = M \bar{a}$$

$$rF = I \alpha = \frac{Mr^2}{2} \alpha \rightarrow F = \frac{Mr \alpha}{2}$$

با فرض حرکت غلتش بدون لغزش داریم: $\bar{a} = r \alpha$

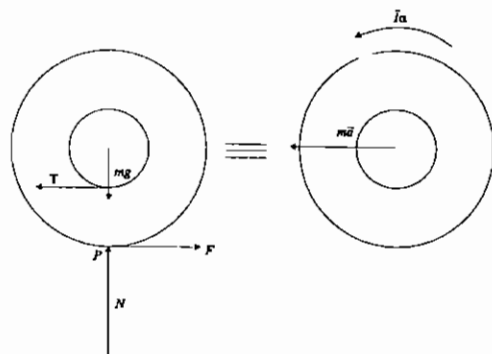
$$\left. \begin{aligned} Mg \sin \theta - F &= M\bar{a} \\ F &= \frac{M\bar{a}}{2} \end{aligned} \right\} \rightarrow Mg \sin \theta - F = 2F \rightarrow F = \frac{Mg \sin \theta}{3}$$

۴- گزینه (۲) صحیح می باشد.

با فرض غلتش بدون لغزش نتیجه می شود: $\bar{a} = R\alpha$

$$\left. \begin{aligned} T - F &= m\bar{a} \\ N &= mg \\ \Sigma M_P &= \bar{I}_P \alpha \rightarrow T(R-r) = \bar{I}_P \alpha \end{aligned} \right\} \frac{\bar{I}_P}{(R-r)R} \bar{a} - F = m\bar{a} \rightarrow$$

$$\left(\frac{\bar{I}_P}{(R-r)R} - m \right) \bar{a} = F \leq \mu_s mg \rightarrow \bar{a} \leq \frac{\mu_s mg}{\left(\frac{\bar{I}_P}{(R-r)R} - m \right)}$$

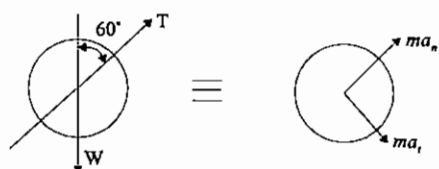


با فرض این که $\bar{I}_P = \frac{mR^2}{2} + mR^2$ می باشد و اگر از ممان اینرسی طناب حول قرقره صرف نظر شود نتیجه می شود:

$$\bar{a}_{\max} = \frac{2\mu_s g(R-r)}{R+2r}$$

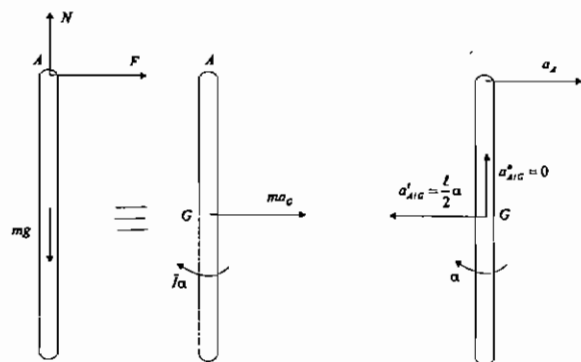
بنابراین گزینه ۲ صحیح می باشد.

۵- گزینه (۴) صحیح می باشد.



$$\left\{ \begin{aligned} T - W \cos 60 &= \frac{W}{g} a_n = 0 \rightarrow T = \frac{W}{2} \\ W \sin 60 &= \frac{W}{g} a_t \rightarrow a_t = g \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866g \end{aligned} \right.$$

۶- گزینه ۳ صحیح می باشد.



$$\bar{a}_G = \bar{a}_A + \bar{a}_{G/A} = \bar{a}_A + (\bar{a}_{G/A})_n + (\bar{a}_{G/A})_t$$

$$a_G = a_A - \frac{\ell}{2} \alpha$$

$$\left\{ \begin{aligned} N &= mg \\ F &= m \left(a_A - \frac{\ell}{2} \alpha \right) \rightarrow \frac{F}{m} + \frac{\ell}{2} \alpha = a_A \rightarrow a_A = \frac{F}{m} + \frac{3F}{m} = \frac{4F}{m} \\ \Sigma M_G &= \bar{I} \alpha \rightarrow F \frac{\ell}{2} = \frac{m \ell^2}{12} \alpha \rightarrow \alpha = \frac{6F}{m \ell} \end{aligned} \right.$$

$$a_A = \frac{4 \times 15}{\frac{10}{32.2}} = 193.2 \left[\frac{ft}{s^2} \right]$$

بنابراین گزینه (۳) جواب صحیح است.

۷ - گزینه (۳) صحیح می باشد.

$$\sqrt{20^2 + 10^2} - 10 = 12.361 [cm]$$

$$K x_1 = mg \rightarrow x_1 = \frac{1 \times 10}{100} = 0.1 m \quad \text{مقدار فشردگی اولیه فنر در اثر وزنه یک کیلوگرمی}$$

$$\begin{cases} T_1 = 0 \\ V_g)_1 = -mg \times 0.2 = -1 \times 10 \times 0.2 = -2 [J] \\ V_e)_1 = \frac{1}{2} K x_1^2 = \frac{1}{2} 100 \times 0.1^2 = 0.5 [J] \end{cases} \quad \begin{cases} T_2 = \frac{1}{2} m v^2 \\ V_g)_2 = 0 \\ V_e)_2 = \frac{1}{2} K x_2^2 = \frac{1}{2} \times 100 (0.2 - 0.1)^2 = 0.5 [J] \end{cases}$$

$$U = Fd = 100 \times 0.12361 = 12.361 [J]$$

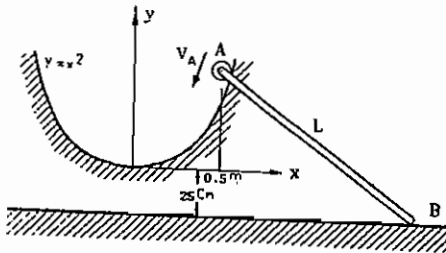
$$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e \rightarrow 12.361 = (0.5 v^2 - 0) + (0 + 2) + (0.5 - 0.5) \rightarrow 0.5 v^2 = 10.361 \rightarrow v = 4.552 \left[\frac{m}{s} \right]$$

۸ - گزینه (۲) صحیح می باشد.

محور دوران منطبق بر خط AB است، چرا که دوران دیسک همانند غلتش مخض یک مخروط با محور AC و یال AB روی یک سطح مخروطی با محور عمودی و یال AB است، لذا جواب گزینه ۲ می باشد.

تست‌های سال ۸۶

- ۱- انتهای A میله AB، به طول $L = 100\text{cm}$ روی کابلی به معادله $y = x^2$ (x و y بر حسب متر) با تندی $V_A = \sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ لغزش می‌کند (شکل). انتهای B میله مجبور به حرکت روی صفحه افقی $y = -25\text{cm}$ است در لحظه ای که $x = 50\text{cm}$ سرعت زاویه‌ای میله AB برابر است با:



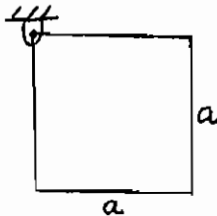
(۱) صفر

(۲) $\sqrt{2}$

(۳) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

(۴) $\sqrt{\frac{4}{3}}$

- ۲- صفحه متجانس مربع شکل به ابعاد $a \times a$ در گوشه‌ای مفصل شده است و از حالت سکون رها می‌شود. سرعت زاویه‌ای آن بعد از ۴۵ درجه چرخش برابر کدام است؟



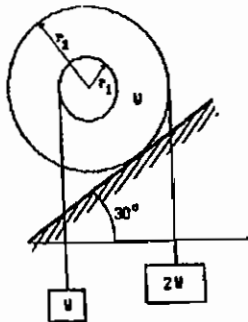
(۱) $\omega^2 = \frac{3}{2}(\sqrt{2} - 1) \frac{g}{a}$

(۲) $\omega^2 = \frac{3\sqrt{2}}{2} \frac{g}{a}$

(۳) $\omega^2 = 3(\sqrt{2} + 1) \frac{g}{a}$

(۴) $\omega^2 = \frac{3}{2}(\sqrt{2} + 1) \frac{g}{a}$

- ۳- استوانه شکل می‌تواند غلطش (بدون لغزش) انجام دهد. در صورتی که $r_2 = 3r_1$ باشد، در این حالت حرکت استوانه است.



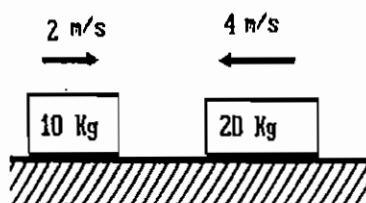
(۱) به سمت بالا

(۲) به سمت پایین

(۳) نوسانی

(۴) ساکن

- ۴- دو وزنه داده شده در شکل با سرعت‌های داده شده به یکدیگر برخورد نموده و متصل به هم ادامه حرکت می‌دهند. سرعت پس از برخورد آنها برابر است با:



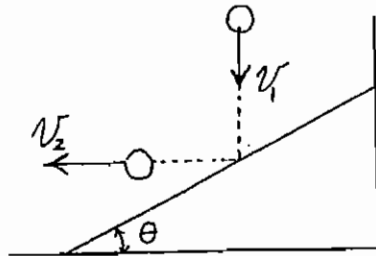
(۱) $2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ به طرف راست

(۲) $4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ به طرف راست

(۳) $2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ به طرف چپ

(۴) $4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ به طرف چپ

۵- یک توپ از وضع قائم به سمت پائین رها می‌شود. این توپ با سرعت v_1 به سطح شیبدار برخورد می‌کند. اگر بخواهیم این توپ پس از برخورد به سطح شیبدار به صورت افقی به سمت چپ حرکت کند، زاویه مورد نیاز شیب و همچنین سرعت پس از برخورد v_2 بر حسب ضریب جهندگی e عبارتند از:



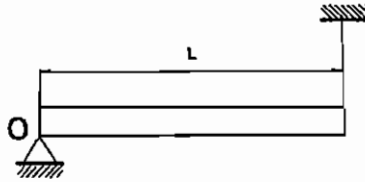
$$\theta = 30^\circ, \quad v_2 = e^2 v_1 \quad (1)$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{1}{e}, \quad v_2 = \frac{1}{e} v_1 \quad (2)$$

$$\theta = \tan^{-1} e, \quad v_2 = e v_1 \quad (3)$$

$$\theta = \tan^{-1} \sqrt{e}, \quad v_2 = \sqrt{e} v_1 \quad (4)$$

۶- تیر افقی شکل به وزن W توسط تکیه گاه لولائی O در یک انتها و یک طناب در انتهای دیگر (شکل)، نگهداری شده است. در یک لحظه طناب پاره می‌شود در این لحظه نیروی تکیه گاه O : (ممان اینرسی تیر نسبت به مرکز جرم آن $\frac{WL^2}{12g}$ فرض کنید).



$$(1) \text{ از } \frac{W}{2} \text{ کوچکتر است.}$$

$$(2) \text{ برابر } \frac{W}{2} \text{ است.}$$

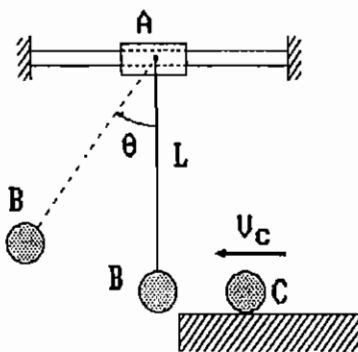
$$(3) \text{ از } \frac{W}{2} \text{ بزرگتر است.}$$

$$(4) \text{ برابر } \frac{W}{4} \text{ است.}$$

۷- حرکت لغزنده A بدون اصطکاک و در لحظه اول بدون حرکت است. جرم‌ها عبارتند از: $m_A = 2m$, $m_C = m_B = m$ تندی

وزنه C در برخورد به وزنه ساکن B برابر $V_C = 2 \frac{m}{s}$ و ضریب برخورد آنها $e = 0.5$ است. سرعت لغزنده A در حداکثر زاویه

انحراف پاندول عبارتست از: (راهنمایی: تندی وزنه‌های A و B در این لحظه برابرند).



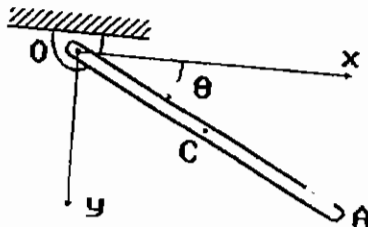
$$(1) \text{ صفر}$$

$$(2) 0.5 \frac{m}{s}$$

$$(3) 1 \frac{m}{s}$$

$$(4) 1.5 \frac{m}{s}$$

۸ - میله یکنواخت OA به 2kg و طول L در نقطه O از صفحه قائم لولا شده و از حال سکون و وضعیت افقی ($\theta = 0$) رها می‌شود. تندی زاویه‌ای میله در $\theta = 30^\circ$ عبارتست از: (ممان اینرسی میله نسبت به مرکز آن برابر $\frac{mL^2}{12}$ فرض می‌شود). (g شتاب ثقل زمین است).



زمین است).

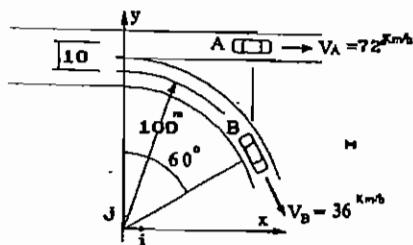
$$\sqrt{\frac{g}{L}} \quad (1)$$

$$\sqrt{\frac{2L}{3g}} \quad (2)$$

$$\sqrt{\frac{3g}{2L}} \quad (3)$$

$$\sqrt{\frac{6g}{L}} \quad (4)$$

۹ - خودروهای A و B در بزرگراهی در حرکت بوده و در یک خروجی خودرو B خارج می‌شود. در لحظه مورد نظر (شکل)، تندی خودرو B برابر $V_B = 36 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ و تندی خودرو A مساوی $V_A = 72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ است: بردار سرعت خودرو A نسبت به خودرو B عبارتست از:



$$72i \frac{\text{km}}{\text{h}} \quad (1)$$

$$9i + 5\sqrt{3}j \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (2)$$

$$(72 - 18\sqrt{3})i + 18j \frac{\text{m}}{\text{h}} \quad (3)$$

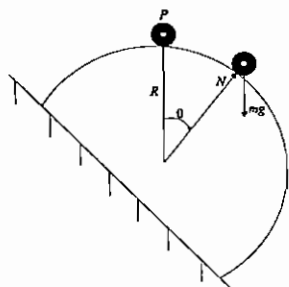
$$54i - 18\sqrt{3}j \frac{\text{km}}{\text{h}} \quad (4)$$

تست‌های سال ۸۷

۱- ذره p به جرم m بر بالای یک سطح صیقلی کروی قرار دارد. با ضربه کوچکی این ذره از حالت سکون به سمت پائین می‌لغزد. زاویه جدایش ذره p از سطح کره چیست؟

$$\sum F_n = ma_n \rightarrow -mg \cos \theta + N = m \left(-\frac{v^2}{R} \right)$$

هنگام ترک ذره: $N = 0 \leftarrow \theta = \theta_L$



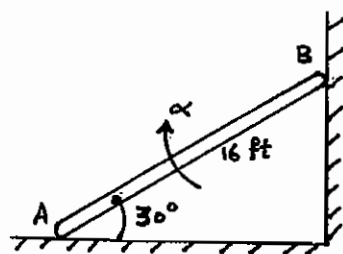
$$\theta_L = \tan^{-1} \left(\frac{2}{3} \right) = 33.7^\circ \quad (1)$$

$$\theta_L = \tan^{-1} \left(\frac{3}{4} \right) = 36.87^\circ \quad (2)$$

$$\theta_L = \cos^{-1} \left(\frac{3}{4} \right) = 44.4^\circ \quad (3)$$

$$\theta_L = \cos^{-1} \left(\frac{2}{3} \right) = 48.2^\circ \quad (4)$$

۲- طول میله AB برابر با 16ft می‌باشد. در این لحظه سرعت v_A و شتاب a_A نقطه A به ترتیب برابر با $6 \frac{ft}{s}$ و $4 \frac{ft}{s^2}$ می‌باشد.



شتاب زاویه‌ای میله را در این لحظه بیابید.

$$1.12 \frac{rad}{s^2} \quad (1)$$

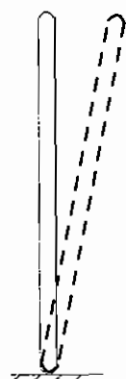
$$1.80 \frac{rad}{s^2} \quad (2)$$

$$1.47 \frac{rad}{s^2} \quad (3)$$

$$4.54 \frac{rad}{s^2} \quad (4)$$

۳- یک میله به جرم 80kg و طول 10m به طور ناگهانی از وضعیت قائم رها می‌شود اگر اصطکاک باعث شود که میله حول انتهای

که با زمین در تماس است، بچرخد، سرعت انتهای دیگر میله را هنگام برخورد با زمین به دست آورید؟ (بر حسب $\frac{m}{s}$)



$$0.67 \quad (1)$$

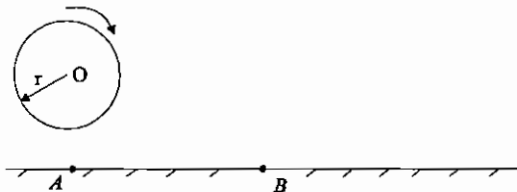
$$17.2 \quad (2)$$

$$21.7 \quad (3)$$

$$180 \quad (4)$$

۴ - کره‌ای که به سرعت زاویه‌ای $7 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ در جای خود می‌چرخد را بر سطح اصطکاک‌زایی با ضریب اصطکاک $\mu = 0.2$ در نقطه A

قرار می‌دهیم. اگر شعاع کره $r = 0.1 \text{ m}$ باشد حداقل فاصله نقطه A و نقطه B چقدر باشد تا گلوله قبل از رسیدن به نقطه B شروع به غلطیدن کند. فرض کنید $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$ $\frac{2}{5} mr^2 = I$ کره (I).



(۱) 2.5 cm

(۲) 1.5 cm

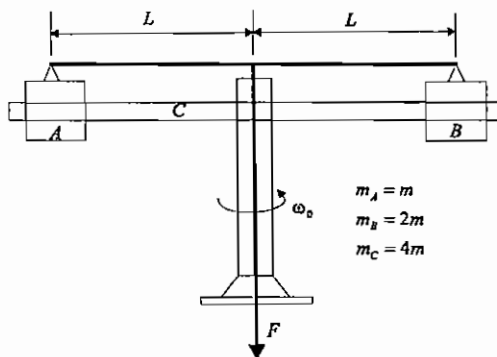
(۳) 1 cm

(۴) 0.5 cm

۵ - در ابتدا مجموعه شکل مقابل با سرعت زاویه‌ای ω_0 می‌چرخد. اگر موقعیت لغزنده‌های A و B بر روی پایه دوار صیقلی C،

توسط نیروی F و طناب‌های متصل شده از L به $\frac{L}{2}$ تغییر نماید، سرعت زاویه‌ای جدید مجموعه عبارتست از: (از ابعاد لغزنده‌های

A و B صرف نظر می‌شود و شعاع زیراسیون پایه C حول محور دوران $\frac{L}{2}$ می‌باشد).



(۱) $\omega = \frac{13}{5} \omega_0$

(۲) $\omega = \frac{16}{7} \omega_0$

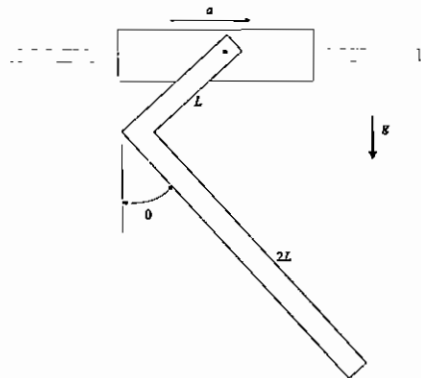
(۳) $\omega = 2 \omega_0$

(۴) $\omega = \omega_0$

تست‌های سال ۸۸

۱- میله ای به شکل L به لوله ای لولا شده که با شتاب ثابت $a = \frac{g}{2}$ بر روی محور افقی به حرکت در می آید. زاویه تعادل θ ، در

شرایط ماندگار کدام است؟



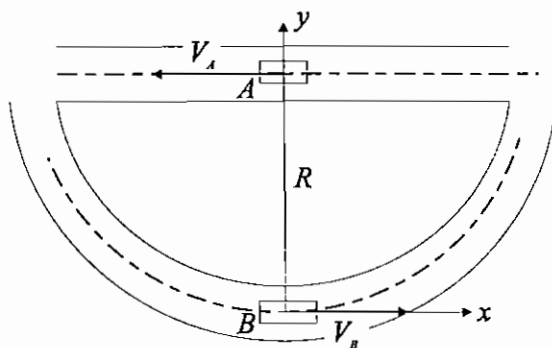
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{7}{13}\right) \quad (۱)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{7}\right) \quad (۲)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{6}{13}\right) \quad (۳)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{5}{11}\right) \quad (۴)$$

۲- ماشین های A و B به ترتیب با سرعت‌های ثابت \vec{V}_A و \vec{V}_B حرکت می کنند. در لحظه نشان داده شده ماشین A در مرکز مسیر دایروی ماشین B قرار دارد. شتاب A نسبت به B، $\vec{a}_{A/B}$ برابر کدام است؟



$$\frac{2V_A V_B}{R} \quad (۱)$$

$$\text{صفر} \quad (۲)$$

$$\frac{2V_A^2}{R} \quad (۳)$$

$$\frac{2V_B^2}{R} \quad (۴)$$

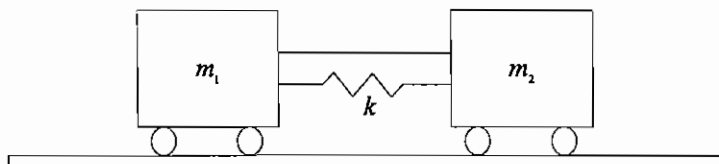
۳- جرم m_1 و m_2 روی سطح افقی بدون اصطکاک قرار داشته و توسط یک نخ به هم وصل شده اند. یک فنر فشاری به مقدار δ نسبت به طول خنثی خود فشرده می شود و به آرامی بین m_1 و m_2 قرار داده می شود. اگر نخ با یک قیچی پاره شود، حداکثر سرعت m_1 چقدر خواهد بود؟

$$\sqrt{\frac{m_2 k}{m_1 m_2 + m_1^2}} \delta \quad (۱) \quad \text{به سمت چپ}$$

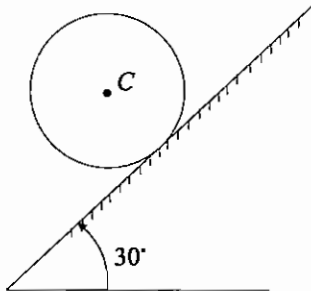
$$\text{صفر} \quad (۲)$$

$$\sqrt{\frac{k}{m_1}} \delta \quad (۳) \quad \text{به سمت چپ}$$

$$\sqrt{\frac{k}{m_1}} \delta \quad (۴) \quad \text{به سمت راست}$$



۴ - استوانه یکنواخت داده شده به شعاع ۱ ft و وزن ۱۰۰ lb در سطح شیب دار 30° بدون لغزش می غلتد. استوانه از سکون شروع به حرکت می کند. تندی آن پس از طی ۱۸ ft روی سطح کدام است؟ (شتاب ثقل زمین ۱ ft و همان اینرسی استوانه نسبت به محور مرکزی آن ۱ ft فرض می شود.)



$$v_c = \sqrt{12g} \quad (۱)$$

$$v_c = \sqrt{2g} \quad (۲)$$

$$v_c = 12g \quad (۳)$$

$$v_c = 2\sqrt{g} \quad (۴)$$

۵ - جرم های m و $2m$ به وسیله میله بی وزنی به طول L به یکدیگر متصل شده اند و با سرعت های نشان داده شده در شکل به طرف بالا پرتاب می شوند. حداکثر ارتفاع مرکز جرم چقدر است؟



$$\frac{3V^2}{g} \quad (۱)$$

$$\frac{8V^2}{9g} \quad (۲)$$

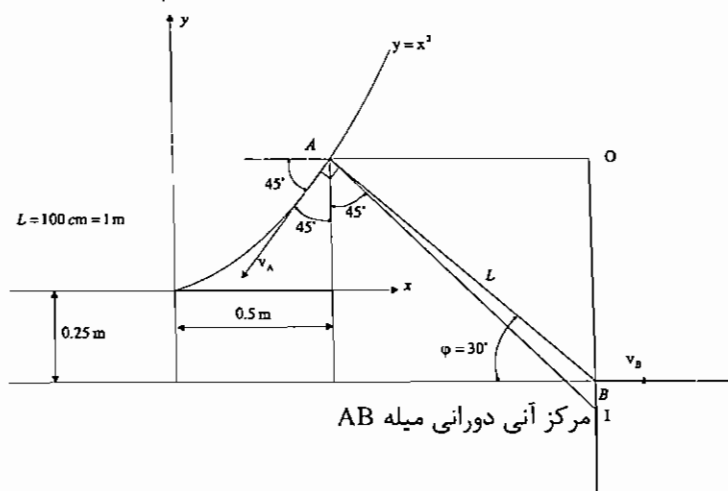
$$\frac{3V^2}{8g} \quad (۳)$$

$$\frac{8V^2}{3g} \quad (۴)$$

پاسخ تشریحی سال ۸۶

۱- گزینه ۳ صحیح می باشد.

$$y = x^2 \Rightarrow y' = 2x \Rightarrow \tan \theta = y' = 2x \Big|_{x=0.5} = 2 \times 0.5 = 1 \Rightarrow \theta = 45^\circ$$



$$\sin \varphi = \frac{(0.5)^2 + 0.25}{1[m]} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 30^\circ$$

$$\begin{cases} OA = L \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ OB = L \sin 30 = \frac{1}{2} \\ AI = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin 45^\circ} = \sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

$$v_A = AI \omega_{AB} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \omega_{AB} \Rightarrow \omega_{AB} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

۲- گزینه ۱ صحیح می باشد.

نقطه O به عنوان مبدأ پتانسیل در نظر گرفته می شود و از روش انرژی استفاده می گردد.

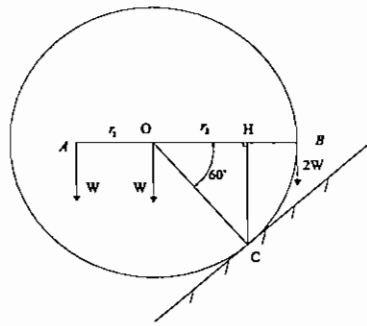
$$\begin{cases} (V_g)_1 = -mg \frac{a}{2} \\ T_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_{(g)2} = -mg \frac{\sqrt{2}}{2} a \\ T_2 = \frac{1}{2} I_o \omega^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{12} m (2a^2) + m \left(\frac{\sqrt{2}}{2} a \right)^2 \right] \omega^2 = \frac{ma^2 \omega^2}{3} \end{cases}$$

$$E_1 = E_2 \Rightarrow T_1 + V_{(g)1} = T_2 + V_{(g)2} \Rightarrow -mg \frac{\sqrt{2}}{2} a + \frac{ma^2 \omega^2}{3}$$

$$\Rightarrow \omega^2 = 3mga \frac{(\sqrt{2}-1)}{2ma^2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3}{2}(\sqrt{2}-1)} \frac{g}{a}$$

۳ - گزینه ۲ صحیح می باشد.



$$\text{جمع گشتاورهای حول C در جهت ساعتگرد} = W \times BH = \frac{Wr_2}{2}$$

$$\text{جمع گشتاورها حول C در جهت پادساعتگرد} = WOH + WAH = W \frac{r_2}{2} + W \left(r_1 + \frac{r_2}{2} \right)$$

$$= W(r_1 + r_2) = W \left(\frac{r_2}{3} + r_2 \right) = \frac{4Wr_2}{3}$$

لذا استوانه در جهت پاد ساعتگرد می چرخد.

$$\frac{4Wr_2}{3} > \frac{Wr_2}{2} \Rightarrow$$

$$OH = r_2 \cos 60 = \frac{r_2}{2}$$

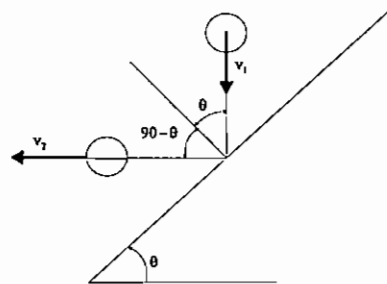
$$BH = OB - OH = r_2 - \frac{r_2}{2} = \frac{r_2}{2}$$

۴ - قانون بقای اندازه حرکت خطی.

بنابراین جواب گزینه ۳ صحیح می باشد.

$$10 \times 2 + 20 \times (-4) = (10 + 20)v \Rightarrow v = -2 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

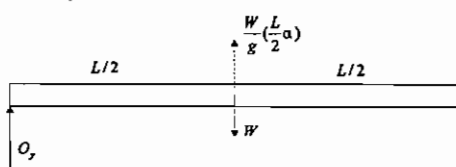
۵ - گزینه ۴ صحیح می باشد.



$$\begin{cases} v_1 \sin \theta = v_2 \sin (90 - \theta) \\ \frac{v_2 \cos (90 - \theta)}{v_1 \cos \theta} = e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{v_2}{v_1} = \tan \theta \\ \frac{v_2}{v_1} \tan \theta = e \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^2 = e \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{e}, \quad \theta = \tan^{-1}(\sqrt{e})$$

۶ - گزینه ۴ صحیح می باشد.



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow O_y + \frac{W}{g} \frac{L}{2} \alpha - W = 0$$

$$\sum M_o = I_o \alpha \Rightarrow W \frac{L}{2} = \frac{1}{3} \frac{W}{g} L^2 \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{3g}{2L}$$

$$\Rightarrow O_y + \frac{WL}{2g} \left(\frac{3g}{2L} \right) - W = 0 \Rightarrow O_y - \frac{W}{4} = 0 \Rightarrow O_y = \frac{W}{4}$$

۷ - گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$m_C v_C + (m_A + m_B) \times 0 = m_C v'_C + (m_A + m_B) v'_G$$

$$m_A \overline{AG} = m_B \overline{BG} \Rightarrow 2m \overline{AG} = m \overline{BG} \Rightarrow \overline{AG} = \frac{\overline{BG}}{2} \Rightarrow v'_G = \frac{2v'_A + v'_B}{3} = \frac{v'_B}{3}$$

$$2m = mv'_C + 3m \left(\frac{v'_B}{3} \right) \Rightarrow \boxed{2 = v'_C + v'_B}$$

$$\frac{v'_B - v'_C}{v_C} = \frac{v'_B - v'_C}{2} = 0.5 = e$$

$$\Rightarrow \boxed{v'_B - v'_C = 1} \Rightarrow v'_B = 1.5 \left[\frac{m}{s} \right], v'_C = 0.5 \left[\frac{m}{s} \right] \Rightarrow v'_G = \frac{1.5}{3} = 0.5 \left[\frac{m}{s} \right]$$

$$(m_A + m_B) v'_G = (m_A + m_B) v'_G = (m_A + m_B) \frac{2v'_A + v'_B}{3} \stackrel{v'_A = v'_B}{=} (m_A + m_B) v'_A \Rightarrow$$

$$v'_A = v'_G = 0.5 \left[\frac{m}{s} \right]$$

۸ - گزینه ۳ صحیح می باشد.

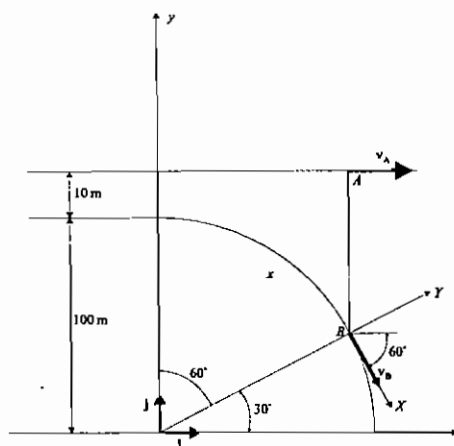
قانون بقای انرژی را به کار می بریم. نقطه O را مبدا پتانسیل در نظر می گیریم.

$$\begin{cases} T_1 = 0 \\ V_g)_1 = 0 \end{cases} \quad m = 2 \text{ [kg]}$$

$$\begin{cases} T_2 = \frac{1}{2} I_o \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{mL^2}{3} \right) \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{2L^2}{3} \right) \omega^2 = \frac{L^2 \omega^2}{3} \\ V_g)_2 = -mg \left(\frac{L}{2} \sin \theta \right) = -2g \frac{L}{2} \sin \theta = -gL \sin \theta \end{cases}$$

$$E_1 = E_2 \Rightarrow 0 = \frac{L^2 \omega^2}{3} - gL \sin \theta \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g \sin \theta}{L}} \Rightarrow \omega \Big|_{\theta = 30^\circ} = \sqrt{\frac{3g}{2L}}$$

۹ - گزینه ۲ صحیح می باشد.



$$\vec{v}_A = 72 \hat{i} \left[\frac{\text{km}}{\text{h}} \right]$$

$$\vec{v}_B = 36 (\cos 60^\circ \hat{i} - \sin 60^\circ \hat{j}) = 18 (\hat{i} - \sqrt{3} \hat{j}) \left[\frac{\text{km}}{\text{h}} \right]$$

$$\vec{v}_{A/B} = \vec{v}_A - \vec{v}_B = 72 \hat{i} - 18 (\hat{i} - \sqrt{3} \hat{j}) =$$

$$= 54 \hat{i} + 18 \sqrt{3} \hat{j} \left[\frac{\text{km}}{\text{h}} \right] = 15 \hat{i} + 5 \sqrt{3} \hat{j} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

$$\vec{r}_{A/B} = (100 + 10 - 100 \sin 30^\circ) \hat{j} = 60 \hat{j} \text{ [m]}$$

$$v_B = 100 \omega \Rightarrow v_B = 36 \left[\frac{\text{km}}{\text{h}} \right] = \frac{36}{3.6} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 100 \omega \Rightarrow \omega = 0.1 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \text{ [ow]}$$

$$\vec{v}_{A/B} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B} + \vec{v}_{Rel} = -0.1\hat{k} \times 60\hat{j} + \vec{v}_{Rel} = 6\hat{i} + \vec{v}_{Rel} = 15\hat{i} + 5\sqrt{3}\hat{j} \Rightarrow$$

$$\vec{v}_{Rel} = 9\hat{i} + 5\sqrt{3}\hat{j} \left[\frac{m}{s} \right]$$

لازم به ذکر است که اگر خودروها به عنوان ذره فرض شوند منظور از بردار سرعت خودرو A نسبت به خودرو B بردار سرعت $\vec{v}_{A/B}$ خواهد بود ولی در این جا طراح سؤال خودروی B را در حکم یک جسم صلب چرخان فرض نموده و منظور از بردار سرعت خودرو A نسبت به B را \vec{v}_{Rel} در نظر گرفته اس^۱ لذا جواب گزینهٔ (۲) می‌باشد.

تست سال ۸۷

۱- گزینه ۴ صحیح می باشد.

از قانون بقای انرژی استفاده می شود.

$$\begin{cases} T_1 = 0 \\ (V_g)_1 = 0 \\ T_2 = \frac{1}{2}mv^2 \\ (V_g)_2 = -mgR(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

$$E_1 = E_2 \Rightarrow 0 = \frac{1}{2}mv^2 - mgR(1 - \cos\theta) \Rightarrow \frac{v^2}{R} = 2g(1 - \cos\theta)$$

$$\sum F_n = ma_n \rightarrow -N + mg \cos\theta = m \frac{v^2}{R} = 2mg(1 - \cos\theta) \Rightarrow N = mg(3 \cos\theta - 2)$$

در لحظه جدایش ذره از سطح $N=0$ می باشد لذا $\cos\theta = \frac{2}{3}$ و یا $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = 48.20^\circ$ و بنابراین جواب گزینه ۴ می باشد.

۲- گزینه ۳ صحیح می باشد.

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A} = \vec{a}_A + \vec{a}_{Rel} + \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{B/A} + \vec{\omega}_{AB} \times \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{B/A} + 2\vec{\omega}_{AB} \times \vec{v}_{Rel}$$

چون نقاط A و B هر دو روی یک جسم صلب قرار دارند لذا $\vec{v}_{Rel} = \vec{a}_{Rel} = \vec{0}$

$$\vec{v}_{B/A} = 16 \cos 30^\circ \hat{i} + 16 \sin 30^\circ \hat{j} = 8\sqrt{3}\hat{i} + 8\hat{j} \text{ [ft]}$$

$$\vec{a}_B = a_B \hat{j}, \quad v_A = (16 \sin 30^\circ) \omega_{AB} \Rightarrow 6 \left[\frac{\text{ft}}{\text{s}} \right] = 8 \omega_{AB} \Rightarrow \omega_{AB} = \frac{3}{4} \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] \Rightarrow$$

$$\vec{\omega}_{AB} = \frac{3}{4} \hat{k} \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right], \quad \dot{\vec{\omega}}_{AB} = \alpha_{AB} \hat{k}$$

$$\vec{a}_A = -4\hat{i} \left[\frac{\text{ft}}{\text{s}^2} \right] \Rightarrow a_B \hat{j} = -4\hat{i} + \alpha_{AB} \hat{k} \times (8\sqrt{3}\hat{i} + 8\hat{j}) + \frac{3}{4} \hat{k} \times \frac{3}{4} \hat{k} \times (8\sqrt{3}\hat{i} + 8\hat{j})$$

$$\Rightarrow a_B \hat{j} = -4\hat{i} + 8\sqrt{3}\alpha_{AB} \hat{j} - 8\alpha_{AB} + \frac{3}{4} \hat{k} \times (6\sqrt{3}\hat{j} - 6\hat{i}) =$$

$$(-4 - 8\alpha_{AB})\hat{i} + 8\sqrt{3}\alpha_{AB} \hat{j} - 9\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{i} - \frac{9}{2}\hat{j}$$

$$\Rightarrow a_B \hat{j} = \left(-4 - 8\alpha_{AB} - 9\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \hat{i} + \left(8\sqrt{3}\alpha_{AB} - \frac{9}{2} \right) \hat{j} \Rightarrow -4 - 8\alpha_{AB} - 9\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow$$

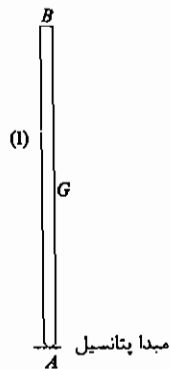
$$\alpha_{AB} = - \left(\frac{8 + 9\sqrt{3}}{16} \right) = -1.47 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \right]$$

۳- گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$m = 80 \text{ kg} , AB = 10 \text{ [m]} , g = 10$$

قانون بقای انرژی را بکار می بریم:

$$\begin{cases} T_1 = 0 \\ V_g)_1 = -mg\left(\frac{\ell}{2}\right) = -5 \times 80 \times 10 = -4000 \text{ [J]} \\ T_2 = \frac{1}{2} I_A \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{3} \ell^2\right) \omega^2 = \frac{80}{6} (10)^2 \omega^2 = \frac{4000}{3} \omega^2 \\ V_g)_2 = 0 \end{cases}$$



$$E_1 = E_2 \Rightarrow 0 = -4000 + \frac{4000}{3} \omega^2 = 0 \Rightarrow \omega^2 = 3 \Rightarrow \omega = \sqrt{3} \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

$$v_B = AB\omega = 10\sqrt{3} \approx 17.2 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

بنابراین جواب گزینه ۲ صحیح می باشد.

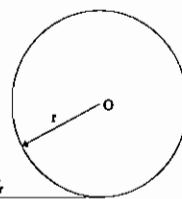
۴- گزینه ۳ صحیح می باشد.



$$I_o = \bar{I} = \frac{2}{5} m r^2 = \frac{2}{5} m (0.1)^2 = \frac{1}{250} m , \omega_0 = 7 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] , v_o = r\omega = 0.1\omega$$

$$F_f = \mu N = \mu mg = 0.2 \times 10m = 2m$$

$$\text{کار نیروی اصطکاک} = F_f \overline{AB} = 2m \overline{AB}$$



$$-F_f r = I_o \alpha \Rightarrow -2m \times 0.1 = \frac{m}{250} \alpha \Rightarrow \alpha = -50 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \right]$$

$$\omega - \omega_0 = \alpha t = -50t \rightarrow \omega = 7 - 50t , F_f = ma \Rightarrow 2m = ma \Rightarrow a = 2 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

$$v_o = at = 2t = r\omega = 0.1\omega \rightarrow \omega = 20t \Rightarrow 20t = 7 - 50t \Rightarrow t = 0.1 \text{ [sec]}$$

$$\Rightarrow v_o = 2 \times 0.1 = 0.2 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

$$v_o^2 - 0 = 2a \overline{AB} \rightarrow \overline{AB} = \frac{v_o^2}{2a} = \frac{(0.2)^2}{2 \times 2} = 0.01 \text{ m} = 1 \text{ [cm]}$$

لذا جواب : گزینه ۳ صحیح می باشد.

۵- گزینه ۲ صحیح می باشد.

قانون بقای اندازه حرکت زاویه ای را به کار می بریم:

$$m_A = m, \quad m_B = 2m, \quad m_C = 4m$$

$$H_O = H \Rightarrow I_C \omega_0 + m_A L^2 \omega_0 + m_B L^2 \omega_0 = I_C \omega + m_A \left(\frac{L}{2} \right)^2 \omega + m_B \left(\frac{L}{2} \right)^2 \omega$$

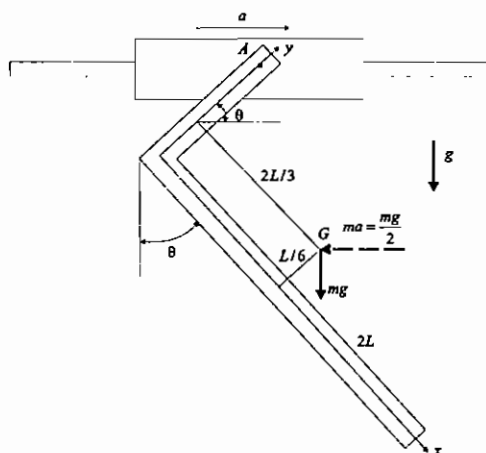
$$\Rightarrow \omega_0 \left(I_C + 3mL^2 \right) = \omega \left(I_C + 3m \frac{L^2}{4} \right)$$

$$K = \sqrt{\frac{I_C}{m_C}} = \sqrt{\frac{I_C}{4m}} = \frac{L}{2} \Rightarrow I_C = 4m \left(\frac{L}{2} \right)^2 = mL^2 \Rightarrow$$

$$\omega_0 \left(mL^2 + 3mL^2 \right) = \omega \left(mL^2 + 3m \frac{L^2}{4} \right) \Rightarrow 4mL^2 \omega_0 = \frac{7}{4} mL^2 \omega \Rightarrow \omega = \frac{16}{7} \omega_0$$

پاسخ تشریحی سال ۸۸

۱- گزینه ۳ صحیح می باشد.



بخشی از میله بطول L را قسمت اول و بخشی از میله بطول $2L$ را قسمت دوم نامیده و جرم میله m در نظر گرفته می شود. با توجه به دستگاه مختصات انتخابی مختصات مرکز جرم میله محاسبه می گردد

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = L/2 \\ m_1 = m/3 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = L \\ y_2 = 0 \\ m_2 = 2m/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{(2m/3)L}{m} = 2L/3 \\ y_G = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = \frac{(m/3)(L/2)}{m} = L/6 \end{cases}$$

گشتاور نیروهای اعمالی به مرکز جرم حول نقطه A عبارت است از

$$M_A = \frac{mg}{2} [(L - L/6) \sin \theta + (2L/3) \sin(90 - \theta)] \pm mg[(L - L/6) \cos \theta - (2L/3) \cos(90 - \theta)] \Rightarrow$$

$$M_A = \frac{mg}{2} [(5L/6) \sin \theta + (2L/3) \cos \theta] \pm mg[(5L/6) \cos \theta - (2L/3) \sin \theta] = 0 \Rightarrow$$

$$[(\pm 5L/6) + (L/3)] \cos \theta + [(5L/12) \mp (2L/3)] \sin \theta = 0 \Rightarrow \tan \theta = \frac{L/4}{7L/6} = \frac{3}{14}, \tan \theta = \frac{L/2}{13L/12} = \frac{6}{13}$$

چون

$$[(L - L/6) \cos \theta - (2L/3) \cos(90 - \theta)]_{\theta=\tan^{-1}(6/13)} = [(5L/6) \cos \theta - (2L/3) \sin \theta]_{\theta=\tan^{-1}(6/13)} > 0$$

۲- گزینه ۱ صحیح می باشد.

$$\begin{cases} \vec{V}_A = -V_A \hat{i} \\ \vec{V}_B = V_B \hat{i} \end{cases}, \begin{cases} \vec{a}_A = 0 \\ \vec{a}_B = \frac{V_B^2}{R} \hat{j} \end{cases}, \vec{\omega} = \frac{V_B}{R} \hat{k}, \dot{\vec{\omega}} = \vec{0}, \vec{r}_{A/B} = R \hat{j}$$

$$\vec{V}_{rel} = \vec{V}_{A/B} - \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B} = \vec{V}_A - \vec{V}_B - \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B} = -(V_A + V_B) \hat{i} - \frac{V_B}{R} \hat{k} \times R \hat{j}$$

$$= -(V_A + V_B) \hat{i} - \frac{V_B}{R} \hat{k} \times R \hat{j} = -(V_A + V_B) \hat{i} + V_B \hat{i} = -V_A \hat{i}$$

لذا جواب

$$\Rightarrow \vec{a}_{A/B} = \vec{a}_A - \vec{a}_B = -\frac{V_B^2}{R} \hat{j} = \vec{a}_{rel} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{A/B} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}$$

$$= \vec{a}_{rel} + \frac{V_B}{R} \hat{k} \times \frac{V_B}{R} \hat{k} \times R \hat{j} + 2 \frac{V_B}{R} \hat{k} \times (-V_A \hat{i}) =$$

$$\vec{a}_{rel} + \frac{V_B}{R} \hat{k} \times (-V_B \hat{i}) - 2 \frac{V_A V_B}{R} \hat{j} = \vec{a}_{rel} - \frac{V_B^2}{R} \hat{j} - 2 \frac{V_A V_B}{R} \hat{j} \Rightarrow \vec{a}_{rel} = 2 \frac{V_A V_B}{R} \hat{j} \Rightarrow a_{rel} = 2 \frac{V_A V_B}{R}$$

۳- گزینه ۱ صحیح می باشد.

بنا به قانون بقای اندازه حرکت خطی نتیجه می شود

$$-m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) \times 0 \Rightarrow v_2 = \frac{m_1}{m_2} v_1$$

و بنابه قانون بقای انرژی نتیجه می شود

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} k \delta^2$$

با جایگذاری رابطه $v_2 = \frac{m_1}{m_2} v_1$ در رابطه بالا حداکثر سرعت m_1 بدست می آید

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{m_1}{m_2} v_1 \right)^2 = \frac{1}{2} k \delta^2 \Rightarrow v_1^2 \left(m_1 + \frac{m_1^2}{m_2} \right) = k \delta^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{m_2 k}{m_1 m_2 + m_1^2}} \delta$$

۴- گزینه ۱ صحیح می باشد.

بنا به قانون بقای انرژی نتیجه می شود

$$\begin{cases} V_g)_1 = 0 \\ T_1 = 0 \\ V_g)_2 = -mg(18 \sin 30) = -900 \\ T_2 = \frac{3}{2} \left(\frac{100 \times (1^2)}{2g} \right) \omega^2 = \frac{75 \omega^2}{g} \end{cases}$$

$$E_1 = E_2 \Rightarrow V_g)_1 + T_1 = V_g)_2 + T_2 \Rightarrow 0 = \frac{75 \omega^2}{g} - 900 \Rightarrow \omega = \sqrt{12g} \Rightarrow v_c = r\omega = \sqrt{12g} \left[\frac{ft}{s} \right]$$

۵- گزینه ۲ صحیح می باشد.

اگر v'_1 و v'_2 سرعت های دو جرم m و $2m$ در بالاترین نقطه باشد سرعت مرکز جرم مجموعه در بالاترین نقطه صفر بوده و با توجه به شکل زیر بر حسب سرعت های v'_1 و v'_2 بصورت زیر بیان می شود

$$v'_G = \frac{(L/3)v'_1 + (2L/3)v'_2}{L} = 0 \Rightarrow v'_2 = -\frac{1}{2} v'_1$$

ممان اینرسی حول مرکز جرم برابر است با

$$I_G = m(2L/3)^2 + 2m(L/3)^2 = (2/3)mL^2$$

و سرعت زاویه ای میله در لحظه پرتاب شدن برابر است با

$$\omega = \frac{2v - v}{L} = \frac{v}{L}$$

و سرعت زاویه ای میله در لحظه رسیدن به ارتفاع اوج برابر است با

$$\omega' = \frac{v'_1 - v'_2}{L} = \frac{v'_1 - \left(-\frac{1}{2}v'_1\right)}{L} = \frac{3v'_1}{2L}$$

بنا به قانون بقای اندازه حرکت زاویه ای حول مرکز جرم نتیجه می شود

$$m(2v)(2L/3) - (2m)v(L/3) + I_G \omega = (2/3)mvL + (2/3)mL^2 \frac{v}{L} = (4/3)mvL$$

$$mv'_1(2L/3) - 2mv'_2(L/3) + I_G \omega' = mv'_1(2L/3) - 2m\left(-\frac{1}{2}v'\right)(L/3) + (2/3)mL^2 \frac{3v'_1}{2L} = 2mv'_1L$$

$$\Rightarrow (4/3)mvL = 2mv'_1L \Rightarrow v'_1 = (2/3)v \Rightarrow$$

بنا به قانون بقای انرژی نتیجه می شود

$$\begin{cases} T_1 = \frac{1}{2}m(2v)^2 + \frac{1}{2}(2m)v^2 + \frac{1}{2}I_G \omega^2 = 3mv^2 + \frac{1}{2}(2/3)mL^2 \left(\frac{v}{L}\right)^2 = \frac{10}{3}mv^2 \\ V_g)_2 = 0 \\ T_2 = \frac{1}{2}mv'^2_1 + \frac{1}{2}(2m)v'^2_2 + \frac{1}{2}I_G \omega'^2 = \frac{1}{2}mv'^2_1 + \frac{1}{2}(2m)v'^2_2 + \frac{1}{2}(2/3)mL^2 \left(\frac{3v'_1}{2L}\right)^2 = \\ \frac{1}{2}mv'^2_1 + \frac{1}{2}(2m)\left(-\frac{1}{2}v'_1\right)^2 + \frac{3}{4}mv'^2_1 = \frac{3}{2}mv'^2_1 = \frac{3}{2}m(2/3)^2 v^2 = (2/3)mv^2 \\ V_g)_2 = 3mgh \end{cases}$$

$$E_1 = E_2 \Rightarrow V_g)_1 + T_1 = V_g)_2 + T_2 \Rightarrow \frac{10}{3}mv^2 = (2/3)mv^2 + 3mgh \Rightarrow h = \frac{8}{9g}v^2$$